COLECCION UNIVERSITARIA DE MATEMATICA PURA, ESTADISTICA Y MATEMATICA APLICADA

Matemáticas

EJERCICIOS RESUELTOS

Tomo 3

E. BERREBI

MATEMATICAS
EJERCICIOS RESUELTOS

TOMO 3

MATEMATICAS
EJERCICIOS RESUELTOS

TOMO 3

POR
Edmond BERRERI
de la Facultad de Ciencias de París

1969
MADRID

COLECCION UNIVERSITARIA DE MATEMATICA PURA,
ESTADISTICA Y MATEMATICA APLICADA

Traducido por
A. GARCIA ARANDA

Título original francés:
MATHÉMATIQUE — EXERCICES CORRIGÉS
Tome 3

Impreso en España
Printed in Spain

Depósito Legal: Z. 244.-1969

PARANINFO Magallanes, 21 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza - 1969

INTRODUCCION

Como en los anteriores tomos de ejercicios de matemáticas, este tercero abarca una gama de ejercicios agrupados en problemas, precedidos de un resumen de los conceptos más importantes teóricos. se divide en cuatro partes.

En la primera se estudian las operaciones en el cuerpo de los números complejos.

La segunda está dedicada al estudio de las ecuaciones lineales de recurrencia. Sus aplicaciones en las ciencias económicas y principalmente en los modelos dinámicos son muy numerosas e importantes.

En la tercera parte, que trata del cálculo lineal, se estudia la noción fundamental de *espacio vectorial* y de *aplicación lineal* de un espacio vectorial en otro. La diagonalización de las matrices cuadradas, principalmente las matrices de Markov, permite estudiar los polinomios matriciales y las series matriciales.

Por último, la cuarta parte se dedica al cálculo integral: integrales simples y múltiples de Riemann e integrales de Stieljes, con algunas aplicaciones en el cálculo de probabilidades.

Como los anteriores tomos de esta colección, este libro tiene como fin familiarizar al lector con el vocabulario, las técnicas de cálculo, y el razonamiento matemático, con el fin de que los pueda utilizar apropiadamente en aquellos problemas de tipo económico que deba resolver.

Es para mí una satisfacción expresar mi agradecimiento a P. CAILLOT, G. DAUSSARGUES y B. EMSELLEM, que han leído las pruebas y me han comunicado sus observaciones. Mi agradecimiento más sincero a Maurice DESPLAS por su inestimable ayuda en la elaboración definitiva del libro y en la corrección de pruebas.

El lector podrá admirar el cuidado con que la Editorial PARANINFO ha editado esta obra. Deseo expresar mi agradecimiento a la misma como asimismo a COMETA, S. A., quien ha sido encargado de su composición tipográfica.

E. B.

INDICE DE MATERIAS

LOS NUMEROS COMPLEJOS

A. DEFINICION.

Se llama número complejo a un par ordenado $z = (x, y)$ de dos números reales $x \in \mathbf{R}$ e $y \in \mathbf{R}$. Se le representa por el símbolo $x + iy$ y se escribe $z = x + iy$.

Se dice que x es la *parte real* de z e y su *parte imaginaria*.

Si $y = 0$, el número z es real; si $x = 0$ se dice que z es un número *imaginario puro*. Obsérvese que el imaginario puro i se expresa por $i = (0, 1)$.

B. REPRESENTACIONES DE UN NUMERO COMPLEJO.

1. Imagen de un número complejo.

Al número complejo $y = (x, y) = x + iy$ se le asocia el punto M que tiene por abscisa x y por ordenada y. El punto M se llama imagen del número complejo z y se dice que z es el *afijo* del punto M.

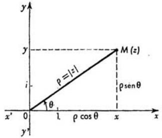


FIG. 1

El plano xOy que contiene las imágenes M de los números complejos $z = (x, y)$ se llama *plano complejo*; $x'Ox$ es el eje real e $y'Oy$ el eje imaginario.

2. Representación trigonométrica de un número complejo.

La imagen M del número complejo $z = (x, y) = x + iy$ se puede determinar también por la medida θ del ángulo $(\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{OM})$ y por el número real positivo o nulo, ρ, que mide la longitud del segmento OM.

Se llama *módulo* del número complejo $z = (x, y)$ al número ρ y se expresa por $\rho = |z|$. El ángulo $\theta = (\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{OM})$ (*), definido salvo en $2k\pi$, es el argumento del número complejo z. El par (ρ, θ) define la representación trigonométrica del número $z = (x, y)$.

Es muy importante señalar que si el par (ρ, θ) define un número complejo único $z = (x, y)$ de módulo ρ y de argumento θ, un número complejo $z = (x, y)$ tiene un módulo único pero una infinidad de argumentos que se deducen de uno de ellos, θ, por la relación $\theta' = \theta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbf{Z}$.

3. Relación entre las dos representaciones de un número complejo z.

La parte real x, la parte imaginaria y, el módulo ρ y el argumento θ del número complejo $z = (x, y)$ que tiene por imagen M están ligados por las relaciones (ver la figura 1):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & (1) \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta & (2) \end{cases}$$

que permiten calcular x e y cuando se conocen ρ y θ. De ello resulta que el número complejo $z = (x, y)$ puede escribirse

$$z = x + iy = \rho \cos \theta + i\rho \operatorname{sen} \theta = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

(**) La forma $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho e^{i\theta}$ se llama *forma trigonométrica* de z.

Ya que

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \rho^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho^2,$$

el módulo ρ del número complejo z es

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

(*) En esta obra considerados el *radián* como unidad de medida de ángulos.
(**) Ver en páginas 39-46 la justificación de la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

Cuando x e y no son ambos nulos se define, salvo en $2k\pi$, el argumento θ del número complejo $z = (x, y)$ por su seno y su coseno

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (4) \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (5) \end{cases}$$

C. RELACIONES ENTRE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

1. Igualdad.

Dos números complejos $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ son iguales si tienen la misma parte real e igual parte imaginaria, es decir si $x = x'$ e $y = y'$.

Los números complejos z y z' definidos por sus respresentaciones trigonométricas (ρ, θ) y (ρ', θ') son iguales si $\rho' = \rho$ y $\theta' = \theta + 2k\pi$.

2. Números complejos conjugados.

Se dice que dos números complejos son conjugados si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas.

El imaginario conjugado del número complejo $z = (x, y) = x + iy$ es el número complejo $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$.

Las imágenes M y $\overline{M}$ de los dos números complejos conjugados son simétricas con relación al eje $x'Ox$.

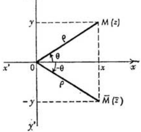


FIG. 2

Si el número complejo $z = x + iy$ tiene por representación trigonométrica (ρ, θ), su conjugado $z = x - iy$ tendrá la (ρ, θ'), siendo $\theta' = -\theta + 2k\pi$.

D. OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS.

1. Adición.

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se llama suma de z_1 y de z_2 al número complejo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

y se expresa por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Multiplicación.

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, se llama producto de z_1 y z_2 al número complejo

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

y se expresa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

En particular el cuadrado del imaginario puro $i = (0, 1)$ es el producto del número complejo i por sí mismo, es decir

$$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$$

e

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Cuando los números complejos a_1 y a_2 vienen dados por su forma trigonométrica $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ su producto

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

se calcula fácilmente; tiene por módulo el producto $\rho_1 \rho_2$ de los módulos de z_1 y de z_2 y por argumento la suma $\theta_1 + \theta_2$ de los argumentos de z_1 y de z_2.

En particular: $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$.

3. Recíproco de un número complejo $z \neq 0$.

El producto del número complejo $z = x + iy$ por su imaginario $\overline{z} = x - iy$ es el número real positivo

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

El recíproco del número complejo $z = x + iy$ es el número complejo

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\rho} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

El recíproco del número complejo no nulo $z = \rho\, e^{i\theta}$ tiene por módulo $\frac{1}{\rho}$ y por argumento $-\theta + 2k\pi$; se escribe:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

E. FORMULAS FUNDAMENTALES.

1. Fórmulas de Euler.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \qquad \forall\theta \in \mathbf{R}$$

2. Propiedades fundamentales de la función $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

$$e^{2ik\pi} = \cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi) = 1$$

$$\text{y} \quad e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{2ik\pi} = e^{i\theta} \qquad \forall k \in \mathbf{Z};$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$\text{y} \quad e^{i(\theta+\pi+2k\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{2ik\pi} = -e^{i\theta} \qquad \forall k \in \mathbf{Z};$$

$$e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$\text{y} \quad e^{i(\theta+\pi/2+2k\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{2ik\pi} = i \cdot e^{i\theta} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

3. Fórmula de Moivre.

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ e^{ik\theta} = \begin{cases} \cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta) \\ (e^{i\theta})^k = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k \end{cases}$$

o sea: $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k = \cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)$.

F. FUNCIONES DE VARIABLES COMPLEJAS.

1. Definición.

Se llama función de una variable compleja, a una función f que asocia a todo elemento z de $\mathbf{C}$ un elemento, que se representa por $f(z)$ de $\mathbf{C}$.

Nos limitamos aquí a las funciones potenciales $z \multimap f(z) = az^n$ (*), en donde a es un número complejo dado y a las combinaciones lineales de esas funciones potenciales: los polinomios $\sum_{j=1}^{n} a_j z^j$ y las series enteras $\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$.

2. Derivada de la función potencial $f(z) = az^n$.

Como en $\mathbf{R}$, la derivada de la función de la variable compleja

$$z \multimap f(z) = az^n$$

es la función $z \multimap f'(z) = naz^{n-1}$.

3. Sucesión de números complejos.

Una sucesión de números complejos es una aplicación de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{C}$. Se utiliza la notación $\{u_n\}$ para representar la sucesión $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$

Se dice que la sucesión $\{u_n\}$ converge 0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \quad \text{tal que} \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |u_n| < \varepsilon,$$

en donde $|u_n|$ es el módulo del número complejo u_n.

G. SERIES ENTERAS DE NUMEROS COMPLEJOS.

1. Definición.

Dado un número complejo z, se llama serie entera $S(z)$, con coeficientes complejos, a una expresión algebraica de la forma

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

(*) Una función f se designa por $x \multimap f(x)$; el símbolo $\rightarrow$ se utiliza para "tiende a".

2. Teorema fundamental.

Consideremos la serie entera de término general $u_n = a_n z^n$; si existe un valor $\rho \in \mathbf{R}$ tal que la serie $S(\rho)$ sea convergente, la serie $S(z)$ es *absolutamente convergente* para todo z tal que $|z| < \rho$. Recordemos que $|z|$ es el módulo del número complejo z.

3. Radio de convergencia de una serie entera.

Se llama radio de convergencia de la serie entera $S(z)$ *al número real positivo* R tal que la serie $S(z)$, sea:

— *absolutamente convergente* para todo z tal que $|z| < R$,
— *divergente* para todo z tal que $|z| > R$.

Cuando $|z| = R$ no hay compartimiento general.

Una serie

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

se puede derivar término a término en el interior de su círculo de convergencia; la serie entera

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia que la serie entera $S(z)$.

4. Funciones de variables complejas definidas por series enteras.

Se llama *función exponencial de la variable compleja z*, a la función $z \longrightarrow f(z) = e^z$ definida, $\forall z \in \mathbf{C}$, por

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Análogamente, se definen, $\forall z \in \mathbf{C}$, las funciones

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Se puede definir también, con la condición de ser $|z| < 1$, la función

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Observación. — La función $\dfrac{1}{1-z}$ no está definida más que para los números complejos *interiores* al círculo de convergencia $|z| = 1$.

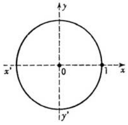


FIG. 3. — Círculo de convergencia $|z| < 1$

H. VALORES NOTABLES DE LAS LINEAS TRIGONOMETRICAS.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

PROBLEMA I

1) Calcular

a) $(2+3\,\mathrm{i})+(5-2\,\mathrm{i})$; $(\sqrt{3}+\mathrm{i})-(3\sqrt{3}+2\,\mathrm{i})$;
$(a+\mathrm{i}b)+(b+\mathrm{i}a)$.

b) $(1+3\,\mathrm{i})\,(3+2\,\mathrm{i})$; $(\sqrt{2}+\mathrm{i})\,(3+\mathrm{i}\sqrt{3})$; $(a+\mathrm{i}b)\,(b+\mathrm{i}a)$.

c) $\dfrac{1+2\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+2\,\mathrm{i}}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2-\mathrm{i}\sqrt{2}}$; $\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$; $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}$.

d) $3\,e^{\mathrm{i}\pi/4}\cdot 2\,e^{\mathrm{i}\pi/3}$; $1/2\,e^{\mathrm{i}\pi/6}\cdot 2/5\,e^{\mathrm{i}\pi/3}$; $\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot 2\sqrt{2}\,e^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

e) $\dfrac{2\,e^{3\mathrm{i}\pi/5}}{3\,e^{2\mathrm{i}\pi/5}}$; $\dfrac{e^{\mathrm{i}\pi/3}}{2\,e^{\mathrm{i}\pi/4}}$; $\dfrac{3\,e^{2\mathrm{i}\pi/5}}{5\,e^{\mathrm{i}\pi/3}}$; $\dfrac{e^{\mathrm{i}\pi/2}}{e^{\mathrm{i}\pi}}$.

2) Expresar bajo la forma trigonométrica $z=\rho\,e^{\mathrm{i}\theta}$, los números complejos:

$$\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\quad \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2};\quad \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2};\quad \frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3};\quad 5\sqrt{2}+5\,\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

3) Resolver sobre el cuerpo **C** de los números complejos las ecuaciones de segundo grado:

a) $z^2-5z+6=0$;

b) $z^2-z+1=0$;

c) $z^2-z\sqrt{2}+1=0$;

d) $z^2-z\sqrt{3}+1=0$.

Cuando las raíces son números complejos, determinar su módulo y sus argumentos para expresarlas en forma trigonométrica.

4) Consideremos el trinomio de segundo grado con coeficientes a y b *reales*:

$$z^2-az-b=0.$$

a) Determinar qué relación debe ligar a a y a b para que tenga:

α) dos raíces reales distintas, que se pide calcular;

β) dos raíces reales iguales, que se pide calcular;

γ) dos raíces imaginarias, que se pide calcular; ¿qué relación existe entre ellas?

b) Se supone que la ecuación de segundo grado $z^2 - az - b = 0$ admite dos raíces imaginarias z_1 y z_2.

α) Expresar el módulo ρ de z_1 y z_2 en función de b.

β) Expresar los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ de argumento θ de z_1 en función de a y de b.

γ) Escribir z_1, z_1^n, z_2 y z_2^n en forma trigonométrica.

δ) Expresar la cantidad $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$ en donde $\alpha \in \mathbf{C}$ y $\beta \in \mathbf{C}$,

$$\rho^n[A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta];$$

¿cómo deben elegirse los números complejos α y β para que u_n sea un número real $\forall n \in \mathbf{N}$?

ε) Si se considera la expresión $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$ como el término general de una sucesión $\{u_n\}$ de números *reales* de la que se conocen los dos primeros términos u_0 y u_1, determinar A_1 y A_2, en función de u_0, u_1, ρ, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

ζ) *Aplicación numérica*: determinar

$$u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n = \rho^n[A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta]$$

cuando $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$, siendo z_1 y z_2 las raíces de la ecuación

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

5) Determinar y representar sobre el plano complejo el conjunto de los números complejos z soluciones de las ecuaciones:

a) $z^2 - 2iz + 1 = 0$,

b) $z^n = 2^n$,

c) $z^n = 1 + i$,

d) $z^n = i$,

e) $z^n = \dfrac{1+i}{1-i}$,

f) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$,

g) $(z-1)^n = (z+1)^n$

(se pondrá $z = x + iy$ o $z = \rho\, e^{i\theta}$).

6) *a*) Calcular las raíces (complejas) de la ecuación $z^3 = 1$.

b) Llamado 1, j, j^2 a esas raíces, verificar que $1 + j + j^2 = 0$.

c) Calcular $(1 + j)^n$, $(1 + j^2)^n$ y $(1 + 1)^n$.

Deducir el valor de

$$S_n = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots.$$

7) Partiendo de la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y de la fórmula de Moivre $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, calcular las sumas

$$\begin{cases} C_n = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta, \\ S_n = \qquad \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \dots + \operatorname{sen} n\theta. \end{cases}$$

8) Se considera la función potencial f de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$ definida por

$$z \multimap f(z) = z^n, \quad \text{en donde} \quad n \in \mathbf{N}.$$

a) Determinar el conjunto de los números complejos z tales que $z = f(z)$.

b) Sean:

$\boldsymbol{D} =$ {el conjunto de los números complejos cuyos afijos se encuentran sobre una misma semirrecta que pasa por el origen O del plano complejo} y

$\boldsymbol{C} =$ {el conjunto de los números complejos cuyos afijos están situatuados sobre el círculo de centro O y de radio ρ_0}.

¿Cuáles son las imágenes $f(\boldsymbol{D})$ y $f(\boldsymbol{C})$ de los conjuntos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{C}$?

9) Se considera el conjunto de los números complejos definidos por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n^2 = (u_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

a) Demostrar que para todo $n \in \mathbf{N}$, se define por la relación de recurrencia anterior, una familia $U_n = \{ u_n^{(0)}, u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(2n-1)} \}$ de 2^n números complejos (y no un sólo número como en $\mathbf{R}$).

b) Demostrar que cuando $n \to \infty$ la familia U_n tiende hacia una familia U_∞ que se pide determinar.

c) Se considera la recurrente $\{u_n\}$ de números complejos definida por:

$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \\ u_n = (u_{n-1})^{1/2} & \forall n \in \mathbf{N} \\ \theta_{n-1} - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \theta_{n-1} + \dfrac{\pi}{2} & \forall n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

en donde θ_n es el argumento de u_n. ¿Cuál es su término general u_n?

d) *Aplicación numérica*: $u_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

10) *a*) Partiendo de la definición de la función $z \multimap f(z) = e^z$, dada en la página 15, calcular el desarrollo en serie de $e^{i\theta}$, en donde θ es un *número real cualquiera* e i el imaginario puro.

b) Utilizando la relación $i^2 = -1$, expresar $e^{i\theta}$ bajo la forma $e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta)$, en donde $C(\theta)$ y $S(\theta)$ son dos series enteras de la variable real θ.

c) Verificar que la función $C(\theta)$ es par y que la función $S(\theta)$ es impar, es decir que $C(-\theta) = C(\theta)$ y $S(-\theta) = -S(\theta)$.

d) Determinar $C(\theta)$ y $S(\theta)$ en función de $e^{i\theta}$ y de $e^{-i\theta}$. Deducir el valor de $[C(\theta)]^2 + [S(\theta)]^2$.

e) Calcular las derivadas $C'(\theta)$ y $S'(\theta)$ de las funciones $C(\theta)$ y $S(\theta)$.

f) Calcular $C(0)$ y demostrar que $C(2) < 0$. Utilizando el hecho de que la función $C(\theta)$ es continua, deducir de lo que precede que $C(\theta)$ se anula. Si $\pi/2$ es la raíz más pequeña positiva de la ecuación $C(\theta) = 0$, calcular $S(\pi/2)$ y $e^{i\pi/2}$. Deducir el valor de $e^{2i\pi}$.

g) Demostrar las relaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} C(\pi - \theta) = -C(\theta) & ; \quad S(\pi - \theta) = S(\theta) \\ C\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -S(\theta) & ; \quad S\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = C(\theta) \\ C(\theta + \pi) = C(\theta) & ; \quad S(\theta + \pi) = -S(\theta) \\ C(\theta) + 2\pi) = C(\theta) & ; \quad S(\theta + 2\pi) = S(\theta). \end{array}\right.$$

Deduciendo que $C(\theta)$ y $S(\theta)$ son funciones periódicas de período 2π.

h) Demostrar que $C(\theta)$ decrece y que $S(\theta)$ crece cuando θ varía desde 0 a $\pi/2$. ¿Cuál es el sentido de las variaciones de $C(\theta)$ y $S(\theta)$ cuando θ varía de 0 a 2π?

Dibujar las curvas representativas de las funciones $\theta \multimap C(\theta)$ y $\theta \multimap S(\theta)$.

i) ¿Qué funciones trigonométricas usuales representan $C(\theta)$ y $S(\theta)$?

11) Se considerarán las funciones hiperbólicas definidas, $\forall \theta \in \mathbf{R}$, por

$$\theta \multimap \operatorname{ch} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$\theta \multimap \operatorname{sh} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

a) ¿Cuál es el desarrollo en serie de ch θ y de sh θ?

b) ¿Cuál es el límite de ch θ y de sh θ cuando $\theta \to +\infty$? ¿Y cuando $\theta \to -\infty$?

c) Calcular las derivadas $(\text{ch } \theta)'$ y $(\text{sh } \theta)'$ de las funciones ch θ y sh θ. Deducir el sentido de las variaciones y la representación gráfica de las funciones $\theta \longmapsto \text{ch } \theta$ y $\theta \longmapsto \text{sh } \theta$.

d) Calcular $\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta$.

e) Comparar:

α) ch iθ y cos θ,
β) sh iθ y sen θ,
γ) cos iθ y ch θ,
δ) sen iθ y sh θ.

12) *a*) Calcular el producto $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}$ de las matrices con términos complejos

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 3 & 0 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 2\,\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 4 & 3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

b) Dadas la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y los vectores $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$:

α) Calcular $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{M}^n \cdot \boldsymbol{x}$.
β) Calcular $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{M}^n \cdot \boldsymbol{y}$.

13) ¿Cuál es la suma de las series?:

a) $$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \dots .$$

b) $$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} + \dots .$$

c) $$1 + \frac{\mathrm{i}\,\pi}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)^n + \dots .$$

Soluciones:

1. *a*) $2 + 3\,\mathrm{i} + (5 - 2\,\mathrm{i}) = (2 + 5) + \mathrm{i}(3 - 2) = 7 + \mathrm{i}$;
$\sqrt{3} + \mathrm{i} - (3\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}) = (\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) + \mathrm{i}(1 - 2) = -2\sqrt{3} - \mathrm{i}$;
$a + \mathrm{i}b + (b + \mathrm{i}a) \quad = (a + b) + \mathrm{i}(b + a) = (a + b)(1 + \mathrm{i})$.

b) $(1+3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i}) = 3+9\mathrm{i}+2\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 =$

$$= 3+11\mathrm{i}-6 \text{ (pues } \mathrm{i}^2=-1)$$
$$= -3+11\mathrm{i};$$

$$(\sqrt{2}+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}+3\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{6}+\mathrm{i}^2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\mathrm{i}(3+\sqrt{6});$$

$$(a+\mathrm{i}b)(b+\mathrm{i}a) = ab+\mathrm{i}b^2+\mathrm{i}a^2+\mathrm{i}^2 ab = ab-ab+\mathrm{i}(a^2+b^2) = \mathrm{i}(a^2+b^2).$$

c) Para hacer que los denominadores de nuestras fracciones sean reales, multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por el *complejo conjugado* del denominador. Así, pues:

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{-1+3\mathrm{i}}{2};$$

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-4\mathrm{i}^2} = \frac{-1-3\mathrm{i}}{5};$$

$$\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2-\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})(2+\mathrm{i}\sqrt{2})}{(2-\mathrm{i}\sqrt{2})(2+\mathrm{i}\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\sqrt{6}}{4-2\mathrm{i}^2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\mathrm{i}(2\sqrt{3}+2)}{6};$$

$$\frac{1-2\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \frac{(1-2\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})}{(\sqrt{2}+\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}-\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{2-\mathrm{i}^2} = \frac{\sqrt{2}-2-\mathrm{i}(2\sqrt{2}+1)}{3};$$

$$\frac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)}{(a-\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)} = \frac{a^2+\mathrm{i}ab+\mathrm{i}ab+\mathrm{i}^2b^2}{a^2-\mathrm{i}^2b^2} = \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^2+b^2}.$$

d) Ya que $\rho\, e^{i\theta} \cdot r\, e^{i\alpha} = \rho r\, e^{i(\theta+\alpha)}$, resulta que:

$$3\, e^{i\pi/4} \cdot 2\, e^{i\pi/3} = 3 \cdot 2\, e^{i(\pi/4+\pi/3)} = 6\, e^{7i\pi/12};$$

$$\frac{1}{2}\, e^{i\pi/6} \cdot \frac{2}{5}\, e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\, e^{i\pi/6} \cdot e^{i\pi/3}$$

$$= \frac{1}{5}\, e^{i(\pi/6+\pi/3)} = \frac{1}{5}\, e^{i\pi/2} = \frac{i}{5} \quad (\text{pues} \quad e^{i\pi/2} = i);$$

$$\sqrt{2}\, e^{i\pi/3} \cdot 2\sqrt{2}\, e^{2i\pi/3} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/3+2i\pi/3}$$

$$= 4\, e^{i\pi} = -4 \quad (\text{pues } e^{i\pi} = -1).$$

e)
$$\frac{2\, e^{3i\pi/5}}{3\, e^{2i\pi/5}} = \frac{2}{3}\, e^{3i\pi/5-2i\pi/5} = \frac{2}{3}\, e^{i\pi/5};$$

$$\frac{e^{i\pi/3}}{2\, e^{i\pi/4}} = \frac{1}{2}\, e^{i\pi/3-i\pi/4} = \frac{1}{2}\, e^{i\pi/12};$$

$$\frac{3\, e^{2i\pi/5}}{5\, e^{i\pi/3}} = \frac{3}{5}\, e^{2i\pi/5-i\pi/3} = \frac{3}{5}\, e^{i\pi/15};$$

$$\frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}} = e^{i\pi/2-i\pi} = e^{-i\pi/2} = -i.$$

2. Sabemos [Ver la pág. 12] que el número complejo $z = x + iy$ tiene por módulo $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ y por argumento el ángulo θ definido por

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

De ello resulta que:

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = 1/2 \\ \operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{o sea } z = e^{-i\pi/3};$$

$$z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{o sea } z = e^{i\pi/4};$$

$$z = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2} \qquad \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}\theta = 1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \text{o sea } z = e^{i\pi/6};$$

$$z = \frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \operatorname{sen}\theta = -\sqrt{2}/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{o sea } z = e^{-i\pi/4};$$

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = 1/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \text{o sea } z = e^{i\pi/3};$$

$$z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \rho = \sqrt{1 + 3} = 2 \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = 1/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \text{o sea } z = 2\,e^{i\pi/3};$$

$$z = 5\sqrt{2} + 5\,\mathrm{i}\sqrt{2} \Rightarrow \rho = \sqrt{50 + 50} = 10 \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{o sea } z = 10\,e^{i\pi/4}.$$

3. *a*) El trinomio de segundo grado $z^2 - 5z + 6 = 0$ cuyo discriminante, $\Delta = 25 - 24 = 1$ es positivo, tiene dos raíces reales

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5 + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{5 + 1}{2} = 3, \\[2ex] z_2 = \dfrac{5 - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{5 - 1}{2} = 2. \end{array} \right.$$

b) El trinomio $z^2 - z + 1 = 0$ cuyo discriminante, $\Delta = 1 - 4 = -3$ es *negativo* no tiene raíces reales: por el contrario, ya que $i^2 = -1$, se puede escribir $\Delta = -3 = 3\,\mathrm{i}^2 = (\mathrm{i}\sqrt{3})^2$ y el trinomio de segundo grado $z^2 - z + 1 = 0$ tiene *dos raíces complejas*

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} \\[2ex] z_2 = \dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3} \end{array} \right.$$

Obsérvese que $z_2 = \bar{z}_1$, es decir que z_1 y z_2 *son dos números complejos conjugados.*

c) El trinomio $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$, cuyo discriminante

$$\Delta = 2 - 4 = -2 = 2\,i^2 = (i\sqrt{2})^2,$$

tiene dos raíces complejas

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4} \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\pi/4} = \bar{z}_1. \end{cases}$$

d) El trinomio $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$, cuyo discriminante

$$\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2,$$

tiene dos raíces complejas

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{i\pi/6}, \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{-i\pi/6} = \bar{z}_1. \end{cases}$$

4. *a*) El trinomio de segundo grado $z^2 - az - b = 0$ tiene dos raíces reales distintas, dos raíces reales confundidas o dos raíces complejas según que su discriminante $\Delta = a^2 + 4\,b$ sea positivo, nulo o negativo.

α) El trinomio $z^2 - az - b = 0$ tiene *dos raíces reales distintas* si $\Delta = a^2 + 4\,b > 0$ ó $b > -a^2/4$.

Las raíces z_1 y z_2 del trinomio tienen entonces por expresión

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2}, \\ z_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2}. \end{cases}$$

β) El trinomio $z^2 - az - b = 0$ tiene *dos raíces reales confundidas* si $\Delta = a^2 + 4\,b = 0$ ó $a^2 = -4\,b$, o sea $a = 2\sqrt{-b}$ [$b = -a^2/4$ es negativo]; la raíz doble z del trinomio tiene entonces por expresión

$$z = \frac{a}{2} = \sqrt{-b}.$$

γ) El trinomio $z^2 - az - b = 0$ tiene dos raíces complejas si

$$\Delta = a^2 + 4b < 0 \quad \text{ó} \quad b < -a^2/4$$

es decir

$$-2\sqrt{-b} < a < 2\sqrt{-b} \ [b < -a^2/4 \text{ es negativo}].$$

Ya que $\Delta = a^2 + 4b < 0$, se puede escribir

$$\Delta = -[-(a^2 + 4b)] = i^2[-(a^2 + 4b)] = [i\sqrt{-(a^2 + 4b)}]^2$$

y z_1 y z_2 tienen entonces por expresión

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{a + i\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}; \\[2ex] z_2 = \dfrac{a - i\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2} = \overline{z_1}. \end{cases}$$

Obsérvese que $z_2 = \overline{z_1}$, es decir que una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tiene un discriminante negativo posee dos raíces complejas conjugadas.

b) α) El módulo ρ del número complejo z_1 (que es también el módulo de $z_2 = \overline{z_1}$) calculado anteriormente:

$$z_1 = \frac{a + i\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}$$

es

$$\rho = |z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{(a^2 + 4b)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{-4b}{4}} = \sqrt{-b}, \qquad \text{o sea } \rho = \sqrt{-b}.$$

β) El argumento θ del número complejo z_1 se define por sus líneas trigonométricas

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{2\sqrt{-b}} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2\sqrt{-b}} \end{cases}$$

γ) De α) y β) se obtiene

$$z_1 = \sqrt{-b}\, e^{i\theta} \Rightarrow z_1^n = (\sqrt{-b})^n e^{in\theta}$$

y

$$z_2 = \sqrt{-b}\,e^{-i\theta} \Rightarrow z_2^n = (\sqrt{-b})^n\,e^{-in\theta}$$

δ) Ya que $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ y $e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$,

$$\begin{aligned} u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n &= \alpha(\sqrt{-b})^n e^{in\theta} + \beta(\sqrt{-b})^n e^{-in\theta} \\ &= (\sqrt{-b})^n [\alpha \cos n\theta + i\alpha \operatorname{sen} n\theta + \beta \cos n\theta - i\beta \operatorname{sen} n\theta] \\ &= (\sqrt{-b})^n[(\alpha + \beta)\cos n\theta + i(\alpha - \beta)\operatorname{sen} n\theta] \\ &= (\sqrt{-b})^n [A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta] \end{aligned}$$

o sea

$$u_n = (\sqrt{-b})^n [A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta],$$

en donde θ viene definido por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{2\sqrt{-b}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{-(a^2+4b)}}{2\sqrt{-b}} \end{cases}$$

y

$$A_1 = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad A_2 = i(\alpha - \beta).$$

Para que u_n sea, $\forall n \in \mathbf{N}$, un número real, es necesario y suficiente que A_1 y A_2 sean ambos reales.

Como

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A_1 \\ i(\alpha - \beta) = A_2 \end{cases} \quad \text{se tiene} \quad \alpha = \frac{A_1}{2} - i\frac{A_2}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{A_1}{2} + i\frac{A_2}{2} = \bar{\alpha},$$

es decir que α y β *son números complejos conjugados.*

ε) Ya que la relación

$$u_n = (\sqrt{-b})^n[A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta]$$

es cierta $\forall n \in \mathbf{N}$, se verifica en particular para $n = 0$ y $n = 1$:

$$\begin{cases} u_0 = (\sqrt{-b})^0[A_1 \cos 0 + A_2 \operatorname{sen} 0] = A_1, \\ u_1 = (\sqrt{-b})\,[A_1 \cos\theta + A_2 \operatorname{sen}\theta] = \sqrt{-b}[u_0 \cos\theta + A_2 \operatorname{sen}\theta], \end{cases}$$

es decir

$$A_1 = u_0 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - u_0\sqrt{-b}\cos\theta}{\sqrt{-b}\operatorname{sen}\theta}.$$

ζ) El trinomio $z^2 - 2z + 4 = 0$ cuyo determinante reducido es $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3\,i^2$ tiene por raíces

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}, \\ z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\pi/3}. \end{cases}$$

Luego se tiene $$u_n = 2^n[\cos n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, n\frac{\pi}{3}]$$

ya que $$A_1 = u_0 = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - u_0\sqrt{-b}\cos\pi/3}{\sqrt{-b}\,\mathrm{sen}\,\pi/3} = \sqrt{3}.$$

5. *a*) El trinomio de segundo grado de coeficientes complejos

$$z^2 - 2iz + 1 = 0$$

que tiene por discriminante reducido

$$\Delta' = i^2 - 1 = -2 = 2\,i^2 = (i\sqrt{2})^2$$

tiene dos raíces complejas

$$\begin{cases} z_1 = i + i\sqrt{2} = i(1 + \sqrt{2}), \\ z_2 = i - i\sqrt{2} = i(1 - \sqrt{2}), \end{cases}$$

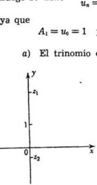


FIG. 4

b) Para resolver en el cuerpo **C** de los números complejos la ecuación $z^n = 2^n$, basta determinar el módulo ρ y los argumentos θ de los números complejos $z = \rho\,e^{i\theta}$ tales que $z^n = 2^n$. Ya que

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\,\mathrm{sen}\,2k\pi = 1,$$

todo número real r se puede expresar en la forma $r = r\,e^{2ik\pi}$; en particular el número real 2^n se puede escribir $2^n e^{2ik\pi}$ y la ecuación $z^n = 2^n$ se transforma en la $\rho^n e^{in\theta} = 2^n e^{2ik\pi}$. Los números complejos $\rho^n e^{in\theta}$ y $2^n e^{2ik\pi}$ son iguales si tienen el mismo módulo $\rho^n = 2^n$ o sea $\rho = 2$ (ya que $\rho = 2$ es el único número *real positivo*, tal que $\rho^n = 2^n$) y si $n\theta = 2k\pi$ o $\theta = 2k\pi/n$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. La ecuación $z^n = 2^n$ tiene entonces en el cuerpo **C** de los números complejos n soluciones:

$$\begin{cases} z_0 &= 2 \\ z_1 &= 2\,e^{2i\pi/n} \\ z_2 &= 2\,e^{4i\pi/n} \\ \vdots \\ z_{n-1} &= 2\,e^{2i(n-1)\pi/n} \end{cases}$$

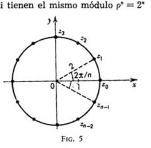


FIG. 5

cuyos afijos están situados sobre el círculo, de centro O y de radio 2, del plano complejo.

c) El número complejo $1 + i$ que tiene por módulo

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

y por argumento θ definido por

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{es decir } \theta = \pi/4.$$

se expresa en forma trigonométrica $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ y la ecuación $z^n = 1 + i$ se puede poner en la forma $\rho^n e^{in\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Los números complejos $\rho^n e^{in\theta}$ y $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ son iguales si

$$\begin{cases} \rho^n = \sqrt{2}, & \text{o sea } \rho = (\sqrt{2})^{1/n} = 2^{1/2n}; \\ n\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, & \text{o sea } \theta = \dfrac{\pi}{4n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \text{ con } k = 0, 1, \ldots, (n-1). \end{cases}$$

La ecuación $z^n = 1 + i$ posee, pues, en el cuerpo **C** de los números complejos n soluciones:

$$\begin{cases} z_0 = 2^{1/2n}\, e^{i\pi/4n}, \\ z_1 = 2^{1/2n}\, e^{i(\pi/4n + 2\pi/n)} = 2^{1/2n}\, e^{9i\pi/4n}, \\ z_2 = 2^{1/2n}\, e^{i(\pi/4n + 4\pi/n)} = 2^{1/2n}\, e^{17i\pi/4n}, \\ \vdots \\ z_{n-1} = 2^{1/2n}\, e^{i(\pi/4n + 2(n-1)\pi/n)} = 2^{1/2n}\, e^{(8n-7)i\pi/4n}, \end{cases}$$

cuyos afijos están situados sobre el círculo, de centro O y de radio $2^{1/2n}$ del plano complejo

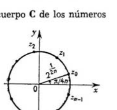


FIG. 6

d) El número complejo i que tiene por módulo 1 y por argumento $\pi/2$ se escribe en forma trigonométrica $i = e^{i\pi/2}$ y la ecuación $z^n = i$ se puede expresar en la forma $\rho^n e^{in\theta} = e^{i\pi/2}$. Los números complejos $\rho^n e^{in\theta}$ y $e^{i\pi/2}$ son iguales si

$$\begin{cases} \rho^n = 1, & \text{o sea } \rho = 1; \\ n\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & \text{o sea } \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \text{ con } k = 0, 1, \ldots, (n-1), \end{cases}$$

La ecuación $z^n = \mathrm{i}$ posee, pues, en el cuerpo **C** de los números complejos n soluciones:

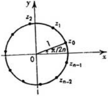


FIG. 7

cuyos afijos están situados sobre el círculo, de centro O y de radio 1, del plano complejo.

$$\begin{cases} z_0 &= e^{i\pi/2n}, \\ z_1 &= e^{i(\pi/2n+2\pi/n)} = e^{i5\pi/2n} \\ z_2 &= e^{i(\pi/2n+4\pi/n)} = e^{i9\pi/2n} \\ \vdots & \\ z_{n-1} &= e^{i(\pi/2n+2(n-1)\pi/n)} = e^{i(4n-3)\pi/2n} \end{cases}$$

e) El número complejo $\dfrac{1+i}{1-i}$ es igual a

$$\frac{(1+\mathrm{i})\,(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\,(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}^2+2\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{2\,\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i};$$

de ello resulta que la ecuación $z^n = \dfrac{1+i}{1-i}$ se escribe $z^n = \mathrm{i}$ y tiene en el cuerpo **C** de los números complejos n soluciones que aparecen en *d*).

f) El número complejo $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ que tiene por módulo $\sqrt{1+3} = 2$ y por argumento el ángulo θ definido por

$$\begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad \text{o sea } \theta = \pi/3$$

se escribe en forma trigonométrica

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}.$$

Para expresar e^z en forma trigonométrica, basta poner $z = x + iy$ y se tiene $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$; la ecuación $e^z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ se escribe entonces $e^x \cdot e^{iy} = 2\,e^{i\pi/3}$. Los números complejos $e^x \cdot e^{iy}$ y $2\,e^{i\pi/3}$ son iguales si

$$\begin{cases} e^x = 2, & \text{o sea} \quad x = \log_e 2; \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi, & \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

La ecuación $e^z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ tiene entonces una infinidad de soluciones:

$$\begin{cases} z_0 = \log_e 2 + \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{3}, \\ z_k = \log_e 2 + \mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi\right), \quad \text{en donde } k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

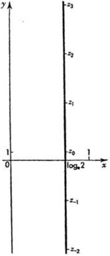


FIG. 8

cuyos afijos están situados sobre la recta de ecuación $x = \log_e 2$, paralela al eje Oy.

g) La ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$ que se puede escribir

$$\frac{(z-1)^n}{(z+1)^n} = 1 = e^{2ik\pi} \quad \text{o bien} \quad \frac{z-1}{z+1} = e^{2ik\pi/n}$$

tiene por soluciones los números complejos z tales que

$$z-1 = (z+1)\,e^{2ik\pi/n} \quad \text{o bien} \quad z(1-e^{2ik\pi/n}) = 1 + e^{2ik\pi/n};$$

entonces se tiene necesariamente $k \neq 0$ y dividiendo el numerador y denominador por $e^{ik\pi/n}$ se obtiene

$$z = \frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}.$$

$$z = \frac{e^{-ik\pi/n}+e^{ik\pi/n}}{e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}} = \frac{\dfrac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{2}}{-\dfrac{e^{ik\pi/n}-e^{-i\pi k/n}}{2}} = -\frac{\cos k\pi/n}{i \operatorname{sen} k\pi/n} = \frac{\cos k\pi/n}{\operatorname{sen} k\pi/n}\,i,$$

en donde $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$. [El valor $k = 0$ ha sido descartado]. La ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$ tiene entonces $(n-1)$ soluciones

$$z_k = \frac{\cos k\pi/n}{\operatorname{sen} k\pi/n}\,i, \quad \text{en donde} \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

cuyos afijos están situados sobre el eje imaginario Oy.

6. *a*) Si se expresa z en forma trigonométrica $z = \rho\, e^{i\theta}$, la ecuación $z^3 = 1$ que tiene por soluciones las raíces cúbicas de la unidad puede ponerse en la forma $\rho^3 e^{3i\theta} = e^{2ik\pi}$. Los números complejos $\rho^3 e^{3i\theta}$ y $e^{2ik\pi}$ son iguales si

$$\begin{cases} \rho^3 = 1, & \text{o sea } \rho = 1; \\ 3\theta = 2k\pi, & \text{o sea } \theta = 2k\pi/3 \quad \text{con } k = 0,\ 1 \text{ y } 2. \end{cases}$$

La ecuación $z^3 = 1$ tiene entonces en el cuerpo **C** de los números complejos las tres soluciones

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = e^{2i\pi/3} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j \\ z_2 = e^{2i\pi/3} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = j^2 \\ \qquad\qquad \text{pues} \quad e^{4i\pi/3} = (e^{2i\pi/3})^2 = j^2. \end{cases}$$

b) Se tiene

$$1+j+j^2=1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=0$$

c) $(1+j)^n=1+C_n^1 j+C_n^2 j^2+C_n^3 j^3+\ldots+C_n^{3k} j^{3k}+C_n^{3k+1} j^{3k+1}+$
$+C_n^{3k+2} j^{3k+2}+\ldots$

$(1+j^2)^n=1+C_n^1 j^2+C_n^2 j^4+C_n^3 j^6+\ldots+C_n^{3k} j^{6k}+C_n^{3k+1} j^{6k+2}+$
$+C_n^{3k+2} j^{6k+4}+\ldots$

$(1+1)^n=1+C_n^1 \quad +C_n^2 \quad +C_n^3 \quad +\ldots+C_n^{3k} \quad +C_n^{3k+1} \quad +C_n^{3k+2} \quad +\ldots$

Antes de deducir de esas tres igualdades el valor de la cantidad

$$S_n = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{3k} + \ldots$$

observaremos, puesto que $j^3 = 1$, que $\forall k$:

$$\begin{cases} j^{3k} = (j^3)^k = 1^k = 1, \\ j^{3k+1} = j^{3k}\cdot j = 1\cdot j = j, \\ j^{3k+2} = j^{3k}\cdot j^2 = 1\cdot j^2 = j^2, \end{cases}$$

lo que implica que

$$\begin{cases} 1 + j^{3k} + j^{6k} = 1+1+1 = 3, \\ 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0, \\ 1 + j^{3k+2} + j^{6k+4} = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0. \end{cases}$$

Por otra parte, ya que $1 + j + j^2 = 0$, se tiene:

$$\begin{cases} 1 + j = -j^2 \\ \qquad\qquad \Rightarrow (1+j)^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n}, \\ 1 + j^2 = -j \;\; \Rightarrow (1+j^2)^n = (-j)^n = (-1)^n j^n, \\ j + j^2 = -1, \end{cases}$$

o sea

$$\begin{aligned}(1+j)^n + (1+j^2)^n + 2^n &= (-1)^n j^{2n} + (-1)^n j^n + 2^n \\ &= (-1)^n j^n (1 + j^n) + 2^n \qquad (1)\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las tres igualdades:

$$
\begin{array}{llllll}
(1+j)^n = 1+C_n^1 j & +C_n^2 j^2 & +C_n^3 j^3 \ldots\ldots\ldots +C_n^{3k} j^{3k} & +C_n^{3k+1} j^{3k+1} & +C^{3k+2} j^{3k+2} & +\cdots \\
(1+j^2)^n = 1+C_n^1 j^2 & +C_n^2 j^4 & +C_n^3 j^6 \ldots\ldots\ldots +C_n^{3k} j^{6k} & +C_n^{3k+1} j^{6k+2} & +C_n^{3k+2} j^{6k+4} & +\cdots \\
(1+1)^n = 1+C_n^1 & +C_n^2 & +C_n^3 \ldots\ldots\ldots +C_n^{3k} & +C_n^{3k+1} & +C_n^{3k+2} & +\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$(1+j)^n+(1+j^2)^n+2^n = 3+C_n^1(j+j^2+1)+C_n^2(1+j^2+j^4)+C_n^3(1+j^3+j^6)+\cdots+C_n^{3k}(1+j^{3k}+j^{6k})+C_n^{3k+1}(1+j^{3k+1}+j^{6k+2})+C_n^{3k+2}(1+j^{3k+2}+j^{6k+4})+\cdots \quad (2)$$

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, el coeficiente de

$$
\begin{array}{llll}
C_n^1 & \text{es} & 1+j+j^2 & =0, \\
C_n^2 & \text{es} & 1+j^2+j^4 & =0, \\
C_n^3 & \text{es} & 1+j^{3k}+j^{6k} & =3, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_n^{3k} & \text{es} & 1+j^{3k+1}+j^{6k+2} & =0, \\
C_n^{3k+1} & \text{es} & 1+j^{3k+2}+j^{6k+4} & =0, \\
C_n^3 & \text{es} & 1+j^3+j^6 & =3,
\end{array}
$$

y el segundo miembro de la igualdad (2) es:

$$3+3C_n^3+3C_n^6+\ldots+3C_n^{3k}+\ldots = 3[1+C_n^3+C_n^6+\ldots+C_n^{3k}+\ldots] = 3S_n,$$

o sea

$$3S_n = (1+j)^n+(1+j^2)^n+2^n = (-1)^n(1+j^n)j^n+2^n \quad \text{[igualdad (1)]},$$

y

$$S_n = \frac{(-1)^n(1+j^n)j^n+2^n}{3}$$

Distinguiremos los tres casos:

$$\alpha)\quad n=3p \quad \Rightarrow j^n = j^{3p} \quad = 1 \Rightarrow S_{3p} = \frac{(-1)^{3p}(1+1)+2^{3p}}{3}$$

$$= \frac{2^{3p}+(-1)^{3p}\cdot 2}{3};$$

$$\beta)\quad n = 3p+1 \Rightarrow$$

$$j^n = j^{3p+1} = j \Rightarrow S_{3p+1} = \frac{(-1)^{3p+1}(1+j)j+2^{3p+1}}{3}$$

$$= \frac{(-1)^{3p+1}(j+j^2)+2^{3p+1}}{3} = \frac{(-1)^{3p}+2^{3p+1}}{3} \text{ ya que } j+j^2=-1;$$

$$\gamma)\quad n = 3p+2 \Rightarrow$$

$$j^n = j^{3p+2} = j^2 \Rightarrow S_{3p+2} = \frac{(-1)^{3p+2}(1+j^2)j^2+2^{3p+2}}{3}$$

$$= \frac{(-1)^{3p+2}(j^2+j)+2^{3p+2}}{3} = \frac{(-1)^{3p+1}+2^{3p+2}}{3}$$

Obsérvese —como debía esperarse— que en las expresiones de S_{3p}, S_{3p+1} y S_{3p+2} no figuran ya las magnitudes complejas j y j^2, ya que las S_n son sumas de enteras positivos. La introducción aquí de los números complejos j y j^2 es un artificio de cálculo que permite con la ayuda de la fórmula del binomio el determinar las S_n que son números reales (e incluso enteros).

7. Para calcular las sumas

$$C_n = 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta$$

y

$$S_n = \operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\ldots+\operatorname{sen}n\theta$$

que son ambas reales, introducimos (naturalmente) una nueva magnitud:

$$\begin{aligned}\Gamma_n = C_n+iS_n &= 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta+i(\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\ldots+\operatorname{sen}n\theta)\\ &= 1+(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)+(\cos 2\theta+i\operatorname{sen}2\theta)+\ldots+(\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta)\\ &= 1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\ldots+e^{in\theta}\end{aligned}$$

ya que, $\forall n\in\mathbf{N}$, se verifica $\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta = e^{in\theta}$.

Basta calcular Γ_n, ya que C_n es su parte real y S_n su parte imaginaria. Entonces:

$$\Gamma_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta} = 1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^n,$$

que es la suma de las $(n+1)$ primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y de razón $e^{i\theta}$, teniendo por expresión:

$$\Gamma_n = \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\cos(n+1)\theta + i\operatorname{sen}(n+1)\theta - 1}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - 1}$$

$$= \frac{\cos(n+1)\theta - 1 + i\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\cos\theta - 1 + i\operatorname{sen}\theta}.$$

Multipliquemos los numeradores y denominadores Γ_n por la expresión conjugada $(\cos\theta - 1 - i\operatorname{sen}\theta)$ de su denominador, se tiene entonces:

$$\Gamma_n = \frac{[\cos(n+1)\theta - 1 + i\operatorname{sen}(n+1)\theta]\,[\cos\theta - 1 - i\operatorname{sen}\theta]}{[\cos\theta - 1 + i\operatorname{sen}\theta]\,[\cos\theta - 1 - i\operatorname{sen}\theta]} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)\theta\cos\theta - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + 1 - i^2\operatorname{sen}(n+1)\theta\operatorname{sen}\theta + i[\operatorname{sen}(n+1)\theta\cos\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta]}{(\cos\theta - 1)^2 - i^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

o bien

$$\Gamma_n = \frac{\cos(n+1)\theta\cos\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta\operatorname{sen}\theta - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + 1 + i[\operatorname{sen}(n+1)\theta\cos\theta - \cos(n+1)\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}\theta]}{\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

Como

$$\cos(n+1)\theta\cos\theta + \operatorname{sen}(n+1)\operatorname{sen}\theta = \cos[(n+1) - 1]\theta = \cos n\theta$$

y

$$\operatorname{sen}(n+1)\theta\cos\theta - \cos(n+1)\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}[(n+1) - 1]\theta = \operatorname{sen} n\theta$$

resulta que:

$$\Gamma_n = \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + 1 + i[\operatorname{sen} n\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}\theta]}{2(1 - \cos\theta)}.$$

La parte real de Γ_n es:

$$C_n = \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + 1}{2(1 - \cos\theta)}$$

y su parte imaginaria:

$$S_n = \frac{\operatorname{sen} n\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}\theta}{2(1 - \cos\theta)}, \quad \text{y}$$

$$\begin{cases} C_n = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{\cos n\theta - \cos (n+1)\theta - \cos\theta + 1}{2(1-\cos\theta)} \\ S_n = \quad \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \ldots + \operatorname{sen} n\theta = \dfrac{\operatorname{sen} n\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}\theta}{2(1-\cos\theta)}. \end{cases}$$

8. *a*) El conjunto de los números complejos z, tales que $z = f(z) = z^n$, es el conjunto de las raíces de la ecuación $z^n - z = 0$. Esta ecuación que puede expresarse en la forma $z(z^{n-1} - 1) = 0$ se verifica cuando:

$z = 0$,

$z^{n-1} = 1$, o sea $z = z_k = e^{2ik\pi/(n-1)}$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)$.

De ello resulta que el conjunto de los números complejos z tales que $z = f(z) = z^n$ es el conjunto

$$\{0, e^{2i\pi/(n-1)}, e^{4i\pi/(n-1)}, \ldots, e^{2i(n-2)\pi/(n-1)}\}.$$

b) Los números complejos $z \in \boldsymbol{D}$ cuyos afijos están situados sobre una misma semirrecta que pasa por el origen O del plano complejo, tienen *el mismo argumento* θ_0 (salvo $2k\pi$) mientras que los números complejos $z \in \boldsymbol{C}$ cuyos afijos están situados sobre el círculo de centro O y de radio ρ_0 tienen *igual módulo* ρ_0, es decir que

$$z \in \boldsymbol{D} \iff z = \rho\, e^{i\theta_0} \quad \text{y} \quad z \in \boldsymbol{C} \iff z = \rho_0\, e^{i\theta}.$$

Cualquiera que sea $z \in \boldsymbol{D}$, se tiene $z = \rho\, e^{i\theta_0}$, lo que implica $f(z) = z^n = \rho^n e^{in\theta_0}$, es decir que el conjunto $f(\boldsymbol{D})$ es el de los números complejos cuyos afijos están situados sobre la semirrecta de *pendiente* $n\theta_0$ que pasa por el origen.

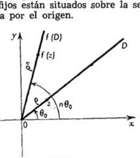


FIG. 9

Observación. — Las rectas $f(\boldsymbol{D})$ y $\boldsymbol{D}$ se confunden cuando $n\theta_0 = \theta_0 + 2k\pi$, o sea $\theta_0^{(k)} = 2k\pi/(n-1)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)$.

Existen entonces $(n-1)$ semirrectas $D_0, D_1, \ldots, D_k, \ldots, D_{n-2}$ que son globalmente invariantes por la aplicación f; cada semirrecta D_k viene determinada por el origen O y el punto $z_k = e^{2ik\pi/(n-1)}$ de-

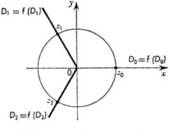


FIG. 10

terminado en a). Sobre la figura 10 se han dibujado las rectas invariantes para la función $z \multimap f(z) = z^4$.

$\forall z \in \boldsymbol{C}$, se tiene $z = \rho_0 e^{i\theta}$ lo que implica $f(z) = z^n = \rho_0{}^n e^{in\theta}$; el conjunto $f(\boldsymbol{C})$ es entonces el de los números complejos que tienen igual módulo $\rho_0{}^n$, es decir el círculo de centro O y de radio $\rho_0{}^n$.

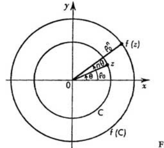


FIG. 11

9. *a*) La relación $u_n^2 = (u_{n-1})$, $\forall n \in \mathbf{N}$ implica $u_1^2 = u_0$ y $u_n^{2n} = u_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$. Si se hace $u_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, la ecuación $u_n^{2n} = u_0$ se escribe

$$\rho_n^{2n} \cdot e^{i2n\theta_n} = \rho_0 e^{i\theta_0}.$$

Como los números complejos $\rho_n^{2^n} \cdot e^{i2^n\theta_n}$ y $\rho_0 e^{i\theta_0}$ son iguales si

$$\begin{cases} \rho_n^{2^n} = \rho_0, & \text{o sea } \rho_n = \rho_0^{1/2^n} \\ 2^n \cdot \theta_n = \theta_0 + 2k\pi, & \text{o sea } \theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n} + \dfrac{2k\pi}{2^n}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, (2^n - 1), \end{cases}$$

la ecuación $u_n^{2^n} = u_0$ tiene 2^n raíces:

$$\begin{cases} u_n^{(0)} = z_0 = \rho_0^{1/2^n} e^{i\theta_0/2^n} \\ u_n^{(1)} = z_1 = \rho_0^{1/2^n} e^{i\left(\frac{\theta_0}{2^n} + \frac{2\pi}{2^n}\right)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} = z_k = \rho_0^{1/2^n} e^{i\left(\frac{\theta_0}{2^n} + \frac{2k\pi}{2^n}\right)} \\ \vdots \\ u_n^{(2^n-1)} = z_{2^n-1} = \rho_0^{1/2^n} e^{i\left(\frac{\theta_0}{2^n} + \frac{2(2^n-1)\pi}{2^n}\right)} \end{cases}$$

cuyos afijos están situados sobre el círculo C_n de centro O y de radio $\rho_n = \rho_0^{1/2^n}$. La relación $u_n = (u_{n-1})^{1/2}$ define para todo $n \in \mathbf{N}$ la familia

$$U_n = \{u_n^{(0)}, u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(k)}, \dots, u_n^{(2^n-1)}\}$$

que es el conjunto de las 2^n raíces de la operación $z^{2^n} = u_0$.

b) Cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$ la familia

$$U_n = \{u_n^{(0)}\ u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(2^n-1)}\}$$

es el conjunto de los 2^n puntos que dividen al círculo C_n, de centro O y de radio $\rho_n = \rho_0^{1/2^n}$, en 2^n arcos iguales. Cuando n tiende a infinito, $\rho_n = \rho_0^{1/2^n}$ tiende a $\rho_0^0 = 1$ y el círculo C_n tiende hacia el C_∞ de centro O y de radio 1. Se puede demostrar que todo punto del círculo C_∞ es límite de una sucesión de puntos, estando el primero sobre C_1, el segundo sobre C_2, el n-ésimo sobre C_n, etc.; la sucesión U_∞ está formada *por puntos situados sobre el círculo* C_∞ de centro O y de radio 1. Obsérvese que cuando n tiene hacia infinito, el número de círculos C_n tiende hacia infinito, pero cada círculo C_n tiene un número finito, a saber 2^n, de puntos. [Ver tomo 2].

c) Las relaciones

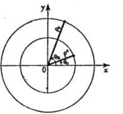
$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} & \\ u_n = (u_{n-1})^{1/2} & \forall n \in \mathbf{N} \\ \theta_{n-1} - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \theta_{n-1} + \dfrac{\pi}{2} & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

definen una sucesión $\{u_n = \rho_n e^{i\theta_n}\}$ de números complejos, pues a cada término $u_{n-1} = \rho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}$ va asociado *el* número complejo

$$u_n = \begin{cases} \rho_{n-1}^{1/2}\, e^{i\theta_{n-1}/2} & \text{si} \quad 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant \pi, \\ \rho_{n-1}^{1/2}\, e^{i[(\theta_{n-1}/2)+\pi]} & \text{si} \quad \pi \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi, \end{cases}$$

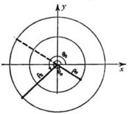
y a todo $n \in \mathbf{N}$ está asociado el número complejo

$$u_n = \begin{cases} \rho_0^{1/2^n}\, e^{i\theta_0/2^n} & \text{si} \quad 0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi, \\ \rho_0^{1/2^n}\, e^{i(\theta_0-2\pi)/2^n} & \text{si} \quad \pi < \theta_0 < 2\pi. \end{cases}$$



$0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$

FIG. 12



$\pi < \theta_0 < 2\pi$

FIG. 13

d) Aplicación numérica: El primer término $u_0 = 1 + i\sqrt{3}$ se escribe en forma trigonométrica $u_0 = 2e^{i\pi/3}$. Como $0 < \pi/3 < \pi$, el término general de la sucesión u_n definida por

$$\begin{cases} u_0 = 1 + i\sqrt{3}, \\ u_n = (u_{n-1})^{1/2}, \\ \theta_{n-1} - \pi/2 \leqslant \theta_n \leqslant \theta_{n-1} + \pi/2, \end{cases}$$

es $u_n = 2^{1/2^n} e^{i\pi/3 \cdot 2^n}$. Esta sucesión converge y tiene por límite el número real 1.

10. *a*) Ya que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

el desarrollo en serie de $e^{i\theta}$, en donde $\theta \in \mathbf{R}$, es:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots + \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

b) Como $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene

$$\begin{cases} i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n, \\ i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i; \end{cases}$$

resulta que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\,\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n\, i\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots + \\ &\quad + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right] \end{aligned}$$

o sea

$$e^{i\theta} = C(\theta) + i\,S(\theta),$$

de donde

$$\begin{cases} C(\theta) = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots + \dfrac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ S(\theta) = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots + \dfrac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{cases}$$

c) Sustituyendo $(-\theta)$ por θ en las expresiones de $C(\theta)$ y $S(\theta)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} C(-\theta) &= 1 - \frac{(-\theta)^2}{2!} + \frac{(-\theta)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n(-\theta)^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots = C(\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(-\theta) &= (-\theta) - \frac{(-\theta)^3}{3!} + \frac{(-\theta)^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n(-\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &= -\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right] = -S(\theta), \end{aligned}$$

es decir que la función $C(\theta)$ es par, mientras que la $S(\theta)$ es impar.

d) Sustituyendo $(-\theta)$ por θ en la identidad $e^{i\theta}=C(\theta)+iS(\theta)$, se obtiene:

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = C(-\theta) + iS(-\theta) = C(0) - iS(\theta)$$

$$[\text{pues } C(-\theta) = C(\theta) \quad \text{y} \quad S(-\theta) = -S(\theta)].$$

Partiendo de las identidades

$$\begin{cases} e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta) & (1) \\ e^{-i\theta} = C(\theta) - iS(\theta) & (2) \end{cases}$$

se determina:

$$C(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

sumando miembro a miembro (1) y (2) y

$$S(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

restando miembro a miembro (1) y (2).

De ello resulta que

$$[C(\theta)]^2 + [S(\theta)]^2 = \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right]^2 + \left[\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right]^2$$

o bien

$$[C(\theta)]^2 + [S(0)]^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\,e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}}{4} + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}}{4\,i^2}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1,$$

o sea

$$[C(\theta)]^2 + [S(\theta)]^2 = 1 \qquad \forall\theta\in\mathbf{R}.$$

e) La derivada de la serie entera

$$C(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

es

$$C'(\theta) = -\frac{2\,\theta}{2!} + \frac{4\,\theta^3}{4!} - \frac{6\,\theta^5}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{2n\,\theta^{2n-1}}{(2n)!} + \dots$$

$$= -\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots\right] = -S(\theta)$$

mientras que la derivada de la serie entera

$$S(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

es

$$S'(\theta) = 1 - \frac{3\,\theta^2}{3!} + \frac{5\,\theta^4}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n\,(2+1)\,\theta^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots = C(\theta),$$

o sea

$$C'(\theta) = -S(\theta) \quad \text{y} \quad S'(\theta) = C(\theta).$$

f) Dando a θ los valores 0 y 2 en la identidad

$$C(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

se obtiene:

$$C(0) = 1,$$

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots - \frac{2^{4p-2}}{(4p-2)!} + \frac{2^{4p}}{(4p)!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \dots$$

$$- \frac{2^{4p-2}}{(4p-2)!}\left(1 - \frac{2^2}{(4p-1)\,4p}\right) - \dots$$

$$= 1 - \frac{4}{3} - R = -\frac{1}{3} - R,$$

en donde

$$R = \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) + \dots + \frac{2^{4p-2}}{(4p-2)!}\left(1 - \frac{1}{p(4p-1)}\right) + \dots$$

es una suma de *números positivos*; de aquí se deduce $C(2)$ es *negativo.*

La función *continua* $C(\theta)$ que es *positiva* cuando $\theta = 0$ y *negativa* cuando $\theta = 2$ se anula para un valor θ_0 tal que $0 < \theta_0 < 2$ [Ver el tomo 2]. Sea $\pi/2$ el valor más pequeño positivo de la ecuación $C(\theta) = 0$; se tiene $C(\pi/2) = 0$, y de relación $[C(\theta)]^2 + [S(\theta)]^2 = 1$, $\forall \theta \in \mathbf{R}$ se deduce

$$\left[S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1 - \left[C\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1 \quad \text{o bien} \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

ya que $$S\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \qquad \text{[Ver } (h)\text{].}$$

Como

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \text{se tiene} \quad e^{i\pi/2} = C\left(\frac{\pi}{2}\right) + iS\left(\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

o sea

$$e^{i\pi/2} = i \quad \text{y} \quad e^{-i\pi/2} = -i.$$

De ello resulta que

$$e^{i\pi} = (e^{i\pi/2})^2 = (e^{i\pi/2})^2 = i^2 = -1, \quad \text{o sea} \quad e^{i\pi} = -1$$

y

$$e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2 = (-1)^2 = 1, \quad \text{o sea} \quad e^{2i\pi} = 1.$$

g) De las relaciones

$$C(\theta) = \frac{e^{\theta i} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad S(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

establecidas en *d*) se deduce:

$$C(\pi - \theta) = \frac{e^{i(\pi-\theta)} + e^{-i(\pi-\theta)}}{2} = \frac{e^{i\pi}\cdot e^{-i\theta} + e^{-i\pi}\cdot e^{i\theta}}{2}$$

$$= \frac{-e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2} = -\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = -C(\theta);$$

$$S(\pi - \theta) = \frac{e^{i(\pi-\theta)} - e^{-i(\pi-\theta)}}{2i} = \frac{e^{i\pi}e^{-i\theta} - e^{-i\pi}e^{i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{-e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = S(\theta)$$

$$C\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i(\theta+\pi/2)} + e^{-i(\theta+\pi/2)}}{2} = \frac{e^{i\theta}e^{i\pi/2} + e^{-i\theta}e^{-i\pi/2}}{2}$$

$$= \frac{ie^{i\theta} - ie^{-i\theta}}{2} = -\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -S(\theta);$$

$$S\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i(\theta+\pi/2)} - e^{-i(\theta+\pi/2)}}{2i} = \frac{e^{i\theta}\cdot e^{i\pi/2} - e^{-i\theta}\cdot e^{-i\pi/2}}{2i}$$

$$= \frac{ie^{i\theta} - (-i)\,e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = C(\theta);$$

$$C(\theta + \pi) = \frac{e^{i(\theta+\pi)} + e^{-i(\theta+\pi)}}{2} = \frac{e^{i\theta}\cdot e^{i\pi} + e^{-i\theta}\cdot e^{-i\pi}}{2}$$

$$= \frac{-e^{i\theta} + (-e^{-i\theta})}{2} = -\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = -C(\theta);$$

$$S(\theta + \pi) = \frac{e^{i(\theta+\pi)} - e^{-i(\theta+\pi)}}{2i} = \frac{e^{i\theta}\cdot e^{i\pi} - e^{-i\theta}\cdot e^{-i\pi}}{2i}$$

$$= \frac{-e^{i\theta} - (-e^{-i\theta})}{2i} = -\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -S(\theta);$$

$$C(\theta + 2\pi) = \frac{e^{i(\theta+2\pi)} + e^{-i(\theta+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{i\theta}\cdot e^{2i\pi} - e^{-i\theta}\cdot e^{-2i\pi}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = C(\theta);$$

$$S(\theta + 2\pi) = \frac{e^{i(\theta+2\pi)} - e^{-i(\theta+2\pi)}}{2} = \frac{e^{i\theta}\cdot e^{2i\pi} + e^{-i\theta}\cdot e^{-2i\pi}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = S(\theta).$$

De estas relaciones resulta que las funciones $C(\theta)$ y $S(\theta)$ son periódicas de período 2π.

h) La función continúa $\theta \multimap C(\theta)$, que toma el valor 1 cuando $\theta = 0$, y que se anula por primera vez cuando $\theta = \pi/2$, es tal que $C(\theta) \geqslant 0$, $\forall\theta \in [0, \pi/2]$. La función continua $\theta \multimap S(\theta)$, cuya derivada $S'(\theta) = C(\theta)$ es *positiva* $\forall\theta \in [0, \pi/2]$, es *creciente* en el intervalo $[0, \pi/2]$; como $S(0) = 0$, se tiene $S(\theta) \geqslant 0$ $\forall\theta \in [0, \pi/2]$.

Utilizando las relaciones demostradas en *c*) y *g*), se puede establecer la tabla de variaciones de las funciones $\theta \multimap C(\theta)$ y $\theta \multimap S(\theta)$ cuando $\theta \in [0, 2\pi]$.

θ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$C'(\theta) = -S(\theta)$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0
$S'(\theta) = C(\theta)$	1	$+ \searrow$	0	$- \searrow$	-1	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	1
$S(\theta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

El signo de $C'(\theta)$ nos da el sentido de variación de $C(\theta)$ indicado en la línea siguiente.

El sentido de variación de $C(\theta)$ y los valores particulares de $C(0) = 1$ y $C(\pi/2) = 0$ nos dan el signo de $S'(\theta) = C(\theta)$.

Las curvas representativas de las funciones $\theta \multimap\!\!\to C(\theta)$ y $\theta \multimap\!\!\to S(\theta)$ se pueden dibujar sobre el sistema de ejes $(O\theta, Oy)$.

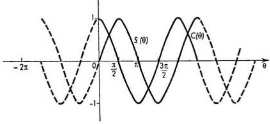


FIG. 14

i) Los resultados anteriores demuestran que las funciones $\theta \multimap\!\!\to C(\theta)$ y $\theta \multimap\!\!\to S(\theta)$ son las funciones trigonométricas:

$$C(\theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad S(\theta) = \operatorname{sen}\theta.$$

Agrupemos los resultados principales obtenidos en este último ejercicio, sustituyendo respectivamente $C(\theta)$ y $S(\theta)$ por $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta & e^{i\pi/2} = i; \quad e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1; \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta & e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i; \quad e^{2i\pi} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \qquad \begin{cases} (\cos\theta)' = -\operatorname{sen}\theta \\ (\operatorname{sen}\theta)' = \cos\theta \end{cases} \qquad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta; \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta; \quad \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\theta; \\ \hfill \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta; \\ \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta; \quad \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta; \quad \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta; \\ \hfill \operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

11. *a*) Ya que

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\theta^n}{n!} + \ldots \quad \forall\theta \in \mathbf{R},$$

se tiene

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!} + \dots + 1 - \theta + \right.$$
$$\left. + \frac{(-\theta)^2}{2!} + \frac{(-\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(-\theta)^n}{n!} + \dots\right]$$
$$= 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

y

$$\operatorname{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!} + \dots\right.$$
$$\left. - \left(1 - \theta + \frac{(-\theta)^2}{2!} + \frac{(-\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(-\theta)^n}{n!} + \dots\right)\right]$$
$$= \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

o sea:

$$\begin{cases} \operatorname{ch}\theta = 1 + \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots + \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots & \forall\theta \in \mathbf{R} \\ \operatorname{sh}\theta = \theta + \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots + \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & \forall\theta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Se observa que $\operatorname{ch}(-\theta) = \operatorname{ch}\theta$ y $\operatorname{sh}(-\theta) = -\operatorname{sh}\theta$, es decir que la función *coseno hiperbólico* $\theta \multimap \operatorname{ch}\theta$ es par y la función *seno hiperbólico* $\theta \multimap \operatorname{sh}\theta$ es impar.

b) Cuando $\theta \to +\infty$, $e^\theta \to +\infty$ y $e^{-\theta} \to 0$. De aquí resulta que

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

tienden hacia el infinito positivo.

Cuando $\theta \to -\infty$, $e^\theta \to 0$ y $e^{-\theta} \to +\infty$. De donde resulta que

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \to +\infty \quad \text{y} \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \to -\infty.$$

c) Puesto que la derivada de e^θ es e^θ y la de $e^{-\theta}$ es $-e^{-\theta}$, se tiene:

$$(\operatorname{ch}\theta)' = \left[\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right]' = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \operatorname{sh}\theta$$

y

$$(\operatorname{sh} \theta)' = \left[\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right]' = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \operatorname{ch} \theta.$$

Como $\forall\, \theta \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{ch} \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots + \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots > 0,$$

la función $\operatorname{sh} \theta$, cuya derivada $(\operatorname{sh} \theta)' = \operatorname{ch} \theta$ es siempre positiva, es creciente. Observando que $\operatorname{ch} 0 = 1$ y $\operatorname{sh} 0 = 0$, se puede establecer la tabla de variaciones de las funciones $\theta \multimap \operatorname{ch} \theta$ y $\theta \multimap \operatorname{sh} \theta$.

θ	$-\infty$				0				$+\infty$
$(\operatorname{sh} \theta)' = \operatorname{ch} \theta$	$+\infty$		$+$		1		$+$		$+\infty$
$(\operatorname{ch} \theta)' = \operatorname{sh} \theta$	$-\infty$	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$
$\operatorname{ch} \theta$	$+\infty$		$\searrow$		1		$\nearrow$		$+\infty$

El signo de $(\operatorname{sh} \theta)'$ nos da el sentido de variaciones $\operatorname{sh} \theta$ indicado en la línea siguiente.
El sentido de variación de $\operatorname{sh} \theta$ y los valores particulares $\operatorname{sh}(\theta) = 0$, $\operatorname{sh}(+\infty) = +\infty$ y $\operatorname{sh}(-\infty) = -\infty$ nos dan el signo de $(\operatorname{ch} \theta)'$.

Dibujemos las curvas representativas de las funciones $\theta \multimap \operatorname{ch}$ y $\theta \multimap \operatorname{sh} \theta$.

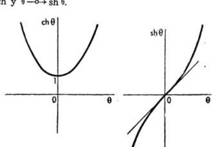


FIG. 15

$$d)\quad \operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = \left[\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right]^2 =$$

$$\frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2\, e^{\theta} \cdot e^{-\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} - 2\, e^{\theta} \cdot e^{-\theta}}{4} = 1,$$

o sea

$$\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1 \qquad \forall \theta \in \mathbf{R}.$$

e) Se tiene:

α) $\operatorname{ch} i\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta,$ o sea $\operatorname{ch} i\theta = \cos\theta$;

β) $\operatorname{sh} i\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\,\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = i \operatorname{sen}\theta,$

o sea $\operatorname{sh} i\theta = i \operatorname{sen}\theta$;

γ) $\cos i\theta = \dfrac{e^{i^2\theta} + e^{-i^2\theta}}{2} = \dfrac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \operatorname{ch}\theta,$

o sea $\cos i\theta = \operatorname{ch}\theta$;

δ) $\operatorname{sen} i\theta = \dfrac{e^{i^2\theta} - e^{-i^2\theta}}{2i} = i\,\dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = i \operatorname{sh}\theta,$

o sea $\operatorname{sen} i\theta = i \operatorname{sh}\theta$.

12. *a*) Para multiplicar matrices con términos complejos $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$, se opera como en el producto de matrices con términos reales sustituyendo cada vez i^2 por (-1), y se obtiene

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1+i & 3 & 0 \\ -2 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & i & 1-i & 1 \\ i & -i & 0 & 2i \\ 1 & 0 & 4 & 3i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5i & -1-2i & 2 & 1+7i \\ -2-i & -2i & -2+6i & -5 \end{pmatrix};$$

b) α) $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ ie^{i\theta} \end{pmatrix}$

$$= e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{i\theta}\cdot\boldsymbol{x}.$$

De ello resulta que

$$\boldsymbol{M}^2\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\cdot e^{i\theta}\cdot\boldsymbol{x} = e^{i\theta}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = e^{i\theta}\cdot e^{i\theta}\cdot\boldsymbol{x} = e^{2i\theta}\cdot\boldsymbol{x}.$$

Análogamente $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene $\boldsymbol{M}^n\cdot\boldsymbol{x} = e^{in\theta}\cdot\boldsymbol{x}$, pues si $\boldsymbol{M}^{n-1}\cdot\boldsymbol{x} = e^{i(n-1)}\cdot\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{M}^n\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}^{n-1}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\cdot e^{i(n-1)\theta}\cdot\boldsymbol{x} = e^{i(n-1)\theta}\,\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = e^{i(n-1)\theta}\,e^{i\theta}\cdot\boldsymbol{x} = e^{in\theta}\cdot\boldsymbol{x}$$

β) $\boldsymbol{M}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ -ie^{-i\theta} \end{pmatrix} = e^{-i\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{-i\theta}\cdot\mathbf{y}.$$

De aquí se deduce

$$\boldsymbol{M}^2 \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{M} \cdot e^{-i\theta} \mathbf{y} = e^{-i\theta} \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{y} = e^{-i\theta} \cdot e^{-i\theta} \mathbf{y} = e^{-2i\theta} \mathbf{y}.$$

Análogamente, $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene $\boldsymbol{M}^n \cdot \mathbf{y} = e^{-in\theta} \cdot \mathbf{y}$, pues si $\boldsymbol{M}^{n-1} \cdot \mathbf{y} = e^{-i(n-1)\theta} \mathbf{y}$,

$$\boldsymbol{M}^n \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M}^{n-1} \mathbf{y} = \boldsymbol{M} \cdot e^{-i(n-1)\theta} \mathbf{y} = e^{-i(n-1)\theta} \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{y} = e^{-i(n-1)\theta} e^{-i\theta} \mathbf{y} = e^{-in\theta} \mathbf{y}.$$

13. a) $1 - \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^4 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n} + \dots$

es el desarrollo en serie de $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$; luego se tiene

$$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^5 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1} + \dots$

es el desarrollo en serie de sen $\pi/3 = \sqrt{3}/2$; luego se tiene

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} + \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) $1 + \dfrac{i\pi}{4} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)^3 + \dots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)^n + \dots$

es el desarrollo en serie de

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

se tiene, pues,

$$1 + \frac{i\pi}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{i\pi}{4}\right)^n + \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

PROBLEMA I'

1) Calcular:

a) $(4-3\mathrm{i})+(5-2\mathrm{i})$; $(\sqrt{3}+\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$;
$(2\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})+(5\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3})$;

b) $(2-4\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})$; $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$; $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$;

c) $\dfrac{3-5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$; $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}}$; $\dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{2}}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}$;
$\dfrac{5+i\sqrt{3}}{2-3i}$; $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{b-\mathrm{i}a}$;

d) $7\,e^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot 5\,e^{\mathrm{i}\pi/6}$; $\dfrac{2}{3}\,e^{3\mathrm{i}\pi/4}\cdot\dfrac{3}{5}\,e^{-\mathrm{i}\pi/2}$; $\rho\,e^{2\mathrm{i}\alpha}\cdot\sqrt{\rho}\,e^{-3\mathrm{i}\alpha}$; $\sqrt{5}\,e^{3\mathrm{i}\pi/4}\cdot 2\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\pi/8}$;

e) $\dfrac{\sqrt[5]{2}\cdot e^{2\mathrm{i}\pi/5}}{3\sqrt[3]{2}\,e^{\mathrm{i}\pi/10}}$; $\dfrac{e^{2\mathrm{i}\pi/3}}{4\,e^{\mathrm{i}\pi/5}}$; $\dfrac{7\,e^{3\mathrm{i}\pi/5}}{5\,e^{-\mathrm{i}\pi/3}}$; $\dfrac{e^{2\mathrm{i}\pi}}{e^{\mathrm{i}\pi}}$; $\dfrac{e^{7\mathrm{i}\pi}}{e^{5\mathrm{i}\pi}}$; $\dfrac{e^{3\mathrm{i}\pi/2}}{7\,e^{-\mathrm{i}\pi/2}}$; $\dfrac{e^{5\mathrm{i}\pi/8}}{3\,e^{-3\mathrm{i}\pi/8}}$.

2) Expresar en forma trigonométrica los números complejos:

$$(1+\mathrm{i})^2;\ (3+4\mathrm{i})^{-1/2};\ (5+12\mathrm{i})^{1/2};\ (7-7\mathrm{i})^3;\ \frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$$

(Se utilizará una tabla trigonométrica).

3) Resolver sobre el cuerpo **C** de los números complejos las ecuaciones de segundo grado:

a) $z^2+z\sqrt{2}+1=0$,
b) $z^2-(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0$.
c) $z^2-2\mathrm{i}z-5=0$,
d) $z^2-2\mathrm{i}z+3=0$,
e) $z^2+z\sqrt{3}+1=0$,

f) $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$,
g) $z^2 - 2z\,\text{sen}\,\alpha + 1 = 0$,
h) $z^2 - 2z + 2 = 0$,
i) $z^2 + 2iz - 1 = 0$,
j) $z^2 + iz + 1 = 0$,
k) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$,
l) $z^2 - 2iz - 2 = 0$.

4) Determinar y representar sobre el plano complejo el conjunto de los números complejos z, soluciones de las ecuaciones:

a) $e^z = \sqrt{3} + i$,
b) $e^z = 5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}$,
c) $z^4 = i$,
d) $z^3 = 1 + i$.
e) $(z-1)^3 = (z+1)^3$,
f) $(z-1)^n = i(z+1)^n$.

5) *a*) Calcular con la ayuda de la fórmula binomio $(1+i)^n$ y $(1-i)^n$.

b) Calcular el módulo y el argumento de $(1+i)^n$ y de $(1-i)^n$.

c) Expresar $(1+i)^n$ y $(1-i)^n$ en forma trigonométrica, después en forma $a + ib$. Deducir los valores de $(1+i)^n + (1-i)^n$ y de $(1+i)^n - (1-i)^n$.

d) Deducir de *a*) y de *c*) el valor de las magnitudes:

$$S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \dots$$

y

$$\Sigma_n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

6) Calcular a partir de las fórmulas de Euler y de Moivre las sumas:

a) $\begin{cases} S_n = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \dots + \cos 2n\theta \\ \Sigma_n = \phantom{1 + {}} \text{sen}\, 2\theta + \text{sen}\, 4\theta + \dots + \text{sen}\, 2n\theta \end{cases}$

b) $\begin{cases} S'_n = 1 + \cos 3\theta + \cos 6\theta + \dots + \cos 3n\theta \\ \Sigma'_n = \phantom{1 + {}} \text{sen}\, 3\theta + \text{sen}\, 6\theta + \dots + \text{sen}\, 3n\theta \end{cases}$

c) $\begin{cases} S''_n = 1 + \cos k\theta + \cos 2k\theta + \dots + \cos kn\theta \\ \Sigma''_n = \phantom{1 + {}} \text{sen}\, k\theta + \text{sen}\, 2k\theta + \dots + \text{sen}\, kn\theta \end{cases}$

7) Se considera la función exponencial f de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$ definida por $z \longrightarrow f(z) = e^z$.

Sean:

$D = \{$el conjunto de los números complejos $z = x_0 + iy$ que tienen la misma parte real $x_0\}$,

y

$D' = \{$el conjunto de los números complejos $z = x + iy_0$ que tienen la misma parte imaginaria $y_0\}$;

¿cuáles son las imágenes $f(D)$ y $f(D')$ de los conjuntos D y D'?

8) Se considera el conjunto de los números complejos definido por

$$\begin{cases} \text{su primer término, } z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}; \\ \text{la relación } \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1} = k\,\dfrac{z_{n-1} - 1}{z_{n-1} + 1}\ \forall n \in \mathbf{N}, \text{ en donde } k \text{ es real.} \end{cases}$$

a) Determinar una relación entre z_n y z_0.

b) Deducir que $\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$ tiene un argumento constante.

c) ¿Para qué valores de k, z_n tiene un límite cuando n se hace infinito? Calcular ese límite, si existe.

d) *Aplicación numérica*:

α) $k = \frac{1}{2}$, $z_0 = i$

β) $k = 3$, $z_0 = 1 + i$

γ) $k = 1$, $z_0 = i\sqrt{3}$.

9) Dado el número complejo $z = \rho e^{i\theta}$ calcular el producto

$$P_n(z) = (z + \bar{z})\,(z^2 + \bar{z}^2) \ldots (z^{2^k} + \overline{z}^{2^k}) \ldots (z^{2^n} + \overline{z}^{2^n}),$$

en donde $\overline{z}^{2^k}$ es el complejo conjugado de z^{2^k}.

(10) Dadas las matrices con términos complejos

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 - i & i - 5 & 3i - 1 \\ 3 + 2i & 2i + 3 & i + 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 - i & 3i \\ 1 & 2i & 1 + i & 2 \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} i & 1 + 3i \\ 3 & -2 + i \\ 0 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular los productos $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}$.

11) Cuál es la suma de las series:

a) $1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \dots$

b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \dots$

c) $1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \dots$

d) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} + \dots$

e) $1 + \frac{i\pi}{6} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^n + \dots$

f) $1 - \frac{i\pi}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\pi}{3}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\pi}{3}\right)^n + \dots$

g) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} + \dots$

h) $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots$

Soluciones:

1. *a)* $9 - 5i;\ 0;\ 7\sqrt{2}.$

b) $20;\ -2 + 2i\sqrt{3};\ 4.$

c) $\frac{-9-19i}{13};\ \frac{-9+19i}{13};\ \frac{-1+2i\sqrt{6}}{5};$

$\frac{6-\sqrt{6}-i(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{12};\ \frac{10-3\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}+15)}{13};\ i.$

d) $35i;\ \frac{2}{5}e^{i\pi/4};\ \rho\sqrt{\rho}\,e^{-i\alpha};\ 10\,e^{7i\pi/8}$

e) $\frac{1}{3\sqrt[15]{4}}e^{3i\pi/10};\ \frac{1}{4}e^{7i\pi/15};\ \frac{7}{5}e^{14i\pi/15};\ -1;\ 1;\ \frac{1}{7};\ -\frac{1}{3}.$

2. $2\,e^{i\pi/2} = 2\,i$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,e^{-0,48i}$; $\sqrt{13}\,e^{0,59i}$; $686\,\sqrt{2}\,e^{-3i\pi/4}$; $e^{-i\pi/4}$:

3. *a*) $z_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\pi/4}$ y $z_2 = \dfrac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{5i\pi/4}$
$(\Delta = -2 = 2\,i^2)$

b) $z_1 = 1$ y $z_2 = i = e^{i\pi/2}$
$(\Delta = -2\,i = (1-i)^2)$

c) $z_1 = 2 + i = \sqrt{5}\,e^{0,46i}$ y $z_2 = -2 + i = \sqrt{5}\,e^{(\pi-0,46)i}$
$(\Delta' = 4)$

d) $z_1 = 3\,i = 3\,e^{i\pi/2}$ y $z_2 = -i = e^{-i\pi/2}$
$(\Delta' = -4 = 4\,i^2)$

e) $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2} = e^{5i\pi/6}$ y $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{2} = e^{7i\pi/6}$
$(\Delta = -1 = i^2)$

f) $z_1 = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$ y $z_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha = e^{-i\alpha}$
$(\Delta' = -\operatorname{sen}^2\alpha)$

g) $z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha = e^{i(\pi/2-\alpha)}$ y $z_2 = \operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha = e^{-i(\pi/2-\alpha)}$
$(\Delta' = -\cos^2\alpha)$

h) $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ y $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$
$(\Delta' = -1 = i^2)$

i) $z_1 = i = e^{i\pi/2}$ y $z_2 = i = e^{i\pi/2} = z_1$
$(\Delta' = 0)$

j) $z_1 = \dfrac{-i(1-\sqrt{5})}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,e^{3i\pi/2}$ y $z_2 = -i\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,e^{3i\pi/2}$
$(\Delta = -5 = 5\,i^2)$

k) $z_1 = \dfrac{-(1-5\,i)+(1-i)}{2\,i} = 2$ y $z_2 = \dfrac{-(1-5\,i)-(1-i)}{2\,i} = 3 + i$
$(\Delta = -2\,i = (1-i)^2)$

l) $z_1 = i + 1 = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ y $z_2 = i - 1 = -1 + i = \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$
$(\Delta' = 1)$

4. *a*) Existen una infinidad de soluciones

$$z_k = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right), \quad \text{de donde} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Los afijos de estos números complejos z_k están sobre la recta de ecuación $x = \log_e 2$.

b) Existen una infinidad de soluciones

$$y_k = \log_e 10 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad \text{en donde} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Los afijos de esos números complejos z_k están sobre la recta de ecuación $x = \log_e 10$.

c) Hay cuatro raíces:

$$z_1 = e^{i\pi/8}, \quad z_2 = e^{5i\pi/8}, \quad z_3 = e^{9i\pi/8} \quad \text{y} \quad z_4 = e^{13i\pi/8}$$

cuyos afijos dividen al círculo de centro O y de radio 1 en cuatro arcos iguales.

d) Existen tres raíces:

$$z_1 = 2^{1/6}\, e^{i\pi/12}, \quad z_2 = 2^{1/6}\, e^{9i\pi/12} \quad \text{y} \quad z_3 = 2^{1/6}\, e^{17i\pi/12}$$

cuyos afijos dividen al círculo de centro O y de radio $2^{1/6}$ en tres arcos iguales.

e) Existen dos raíces:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}.$$

f) Hay n soluciones:

$$z_k = \frac{\cos\dfrac{4k+1}{4n}\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{4k+1}{4n}\pi}\mathrm{i}, \quad \text{en donde} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$$

5. *a*) $(1+\mathrm{i})^n = 1 + C_n^1\mathrm{i} + C_n^2\mathrm{i}^2 + C_n^3\mathrm{i}^3 + C_n^4\mathrm{i}^4 + C_n^5\mathrm{i}^5 + \ldots =$

$$= 1 + C_n^1\mathrm{i} - C_n^2 - C_n^3\mathrm{i} + C_n^4 + C_n^5\mathrm{i}\ldots$$

$$(1-\mathrm{i})^n = 1 - C_n^1\mathrm{i} + C_n^2\mathrm{i}^2 - C_n^3\mathrm{i}^3 + C_n^4\mathrm{i}^4 - C_n^5\mathrm{i}^5 + \ldots =$$

$$= 1 - C_n^1\mathrm{i} - C_n^2 + C_n^3\mathrm{i} + C_n^4 - C_n^5\mathrm{i} + \ldots$$

b) $(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \Rightarrow (1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\, e^{in\pi/4}$

y

$$(1-\mathrm{i}) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \Rightarrow (1-\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\, e^{-in\pi/4}$$

c) $(1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\, e^{in\pi/4} = 2^{n/2}\left[\cos\dfrac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}\right]$

y

$$(1-\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/4} = 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right]$$

de donde se deduce que

$$(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\mathrm{i})^{4p} + (1-\mathrm{i})^{4p} = (-1)^p\, 2^{2p+1} \\ (1+\mathrm{i})^{4p+1} + (1-\mathrm{i})^{4p+1} = (-1)^p\, 2^{2p+1} \\ (1+\mathrm{i})^{4p+2} + (1-\mathrm{i})^{4p+2} = 0 \\ (1+\mathrm{i})^{4p+3} + (1-\mathrm{i})^{4p+3} = (-1)^{p+1}\, 2^{2p+2} \end{cases}$$

y

$$(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n = 2^{n/2+1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\mathrm{i})^{4p} - (1-\mathrm{i})^{4p} = 0 \\ (1+\mathrm{i})^{4p+1} - (1-\mathrm{i})^{4p+1} = (-1)^p\, 2^{2p+1}\,\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})^{4p+2} - (1-\mathrm{i})^{4p+2} = (-1)^p\, 2^{2p+2}\,\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})^{4p+3} - (1-\mathrm{i})^{4p+3} = (-1)^p\, 2^{2p+2}\,\mathrm{i} \end{cases}$$

d) $S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots =$

$$= \frac{(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{4p} = (-1)^p\, 2^{2p} \\ S_{4p+1} = (-1)^p\, 2^{2p} \\ S_{4p+2} = 0 \\ S_{4p+3} = (-1)^{p+1}\, 2^{2p+1} \end{cases}$$

y

$\sum_n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots =$

$$= \frac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{2\,\mathrm{i}} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{4p} = 0 \\ \sum_{4p+1} = (-1)^p\, 2^{2p} \\ \sum_{4p+2} = (-1)^p\, 2^{2p+1} \\ \sum_{4p+3} = (-1)^p\, 2^{2p+1} \end{cases}$$

6.

$$a) \begin{cases} S_n = \dfrac{\cos 2n\theta - \cos 2(n+1)\theta - \cos 2\theta + 1}{2(1-\cos 2\theta)}, \\ \Sigma_n = \dfrac{\mathrm{sen}\, 2n\theta - \mathrm{sen}\, 2(n+1)\theta + \mathrm{sen}\, 2\theta}{2(1-\cos 2\theta)}; \end{cases}$$

b) $\left\{\begin{array}{l} S'_n = \dfrac{\cos 3\,n\theta - \cos 3(n+1)\,\theta - \cos 3\,\theta + 1}{2(1-\cos 3\,\theta)}, \\ \Sigma'_n = \dfrac{\operatorname{sen} 3\,n\theta - \operatorname{sen} 3(n+1)\,\theta + \operatorname{sen} 3\,\theta}{2(1-\cos 3\,\theta)}; \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} S''_n = \dfrac{\cos k\,n\theta - \cos k(n+1)\,\theta - \cos k\,\theta + 1}{2(1-\cos k\,\theta)}, \\ \Sigma''_n = \dfrac{\operatorname{sen} k\,n\theta - \operatorname{sen} k(n+1)\,\theta + \operatorname{sen} k\,\theta}{2(1-\cos k\,\theta)}. \end{array}\right.$

7. Como $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, la imagen $f(D)$ de los números complejos $z = x_0 + iy$ que tienen la misma parte real x_0 es el conjunto de los números complejos $e^{x_0} \cdot e^{iy}$ que tienen *el mismo módulo* e^{x_0}; $f(D)$ es, entonces, el conjunto de los puntos del círculo de centro O y de radio e^{x_0}. Igualmente, la imagen $f(D')$ de los números complejos $z = x + iy_0$ que tienen igual parte imaginaria y_0 es el conjunto de los números complejos $e^x \cdot e^{iy_0}$ que tienen *el mismo argumento* y_0 (salvo $2k\pi$); $f(D')$ es entonces el conjunto de los números complejos cuyos afijos están alineados con el origen sobre la semirrecta de pendiente y_0.

8. *a)* $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene

$$\frac{z_n - 1}{z_n + 1} = k^n \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}.$$

b) Como k^n es real, el argumento de $\dfrac{z_n - 1}{z^n + 1}$ es igual al de $\dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, y es, por lo tanto, constante.

c) Si $|k| < 1$, $k^n \to 0$ y $z_n \to 1$.

Si $|k| > 1$, $\dfrac{1}{k^n} \to 0$ y ya que $\dfrac{z_n + 1}{z_n - 1} = \dfrac{1}{k^n} \dfrac{z_0 + 1}{z_0 - 1}$, $z_n \to -1$,

Si $k = 1$, $z_n = z_0$.

Si $k = -1$, la sucesión es indeterminada, pues $z_{2p} = z_0$ y z_{2p+1}/z_0.

d) Aplicación numérica:

α) z_n converge hacia 1,
β) z_n converge hacia -1,
γ) la sucesión $\{z_n\}$ es constante; $z_n = z_0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

9. Se tiene

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad z^{2^k} = \rho^{2^k} e^{i2^k\theta}$$

y

$$z^{2^k} + \bar{z}^{-2^k} = \rho^{2^k}(e^{i2^k\theta} + e^{-i2^k\theta}) = 2\rho^{2^k} \cos 2^k \theta.$$

De aquí resulta que el producto $P_n(z)$ tiene por expresión:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= (z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^{2^k} + \bar{z}^{2^k}) \dots (z^{2^n} + \bar{z}^{2^n}) \\ &= 2\rho \cos\theta \cdot 2\rho^2 \cos 2\theta \dots 2\rho^{2^k} \cos 2^k\theta \dots 2\rho^{2^n} \cos 2^n\theta \\ &= 2^n \rho^{1+2+\dots+2^k+\dots+2^n} \cos\theta \cos 2\theta \dots \cos 2^k\theta \dots \cos 2^n\theta \\ &= 2^n \rho^{(2^{n+1}-1)} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2 \operatorname{sen}\theta} \, \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{2\operatorname{sen} 2\theta} \cdots \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\theta}{2 \operatorname{sen} 2^n\theta} \\ &= \rho^{(2^{n+1}-1)} \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \left[\text{pues } \cos 2^k\theta = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\theta}{2\operatorname{sen} 2^k\theta}\right] \end{aligned}$$

o sea

$$P_n(z) = \rho^{(2^{n+1}-1)} \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

10. $$M \cdot N = \begin{pmatrix} -4+3i & -1-13i & -2-6i & -7+8i \\ 1+5i & -6+5i & 7+2i & 13i \end{pmatrix};$$

$$N \cdot P = \begin{pmatrix} -1-3i & -4 \\ -2+7i & -2i \\ -3 & 1-i \end{pmatrix};$$

$$M \cdot N \cdot P = \begin{pmatrix} 1-51i & -4+18i \\ -23+3i & -5-15i \end{pmatrix};$$

$$P \cdot M \cdot N = \begin{pmatrix} -17+4i & -8-14i & 7+21i & -47+6i \\ -19 & 4-55i & -22-15i & -34-2i \\ 5-i & 5+6i & 2-7i & 13 \\ 4-3i & 1+13i & 2+6i & 7-8i \end{pmatrix}.$$

11. *a*) $$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \dots =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

b) $$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\dots=$$
$$=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

c) $$1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\dots=$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

d) $$\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}+\dots=$$
$$=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

e) $$1+\frac{i\pi}{6}+\frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^2+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^n+\dots=$$
$$=e^{i\pi/6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2};$$

f) $$1-\frac{i\pi}{3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{-i\pi}{3}\right)^2+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{-i\pi}{3}\right)^n+\dots=$$
$$=e^{-i\pi/3}=\cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

g) $$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{(2n)!}+\dots=\operatorname{ch}1=\frac{e+e^{-1}}{2}=\frac{e^2+1}{2e};$$

h) $$1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots+\frac{1}{(2n+1)!}+\dots=$$
$$=\operatorname{sh}1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-1}{2e}.$$

ECUACIONES LINEALES DE RECURRENCIA

Dada una fución de k variables $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, se puede calcular cada término u_n de una sucesión numérica a partir de los k términos que le preceden por la regla de recurrencia:

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}) + g(n) \qquad (E)$$

en donde $g(n)$ es una función definida sobre $\mathbf{N}$ y con valores en $\mathbf{R}$.

Para definir la sucesión $\{u_n\}$ (*), es preciso dar arbitrariamente, además de la ecuación (E) que se denomina *ecuación de recurrencia del orden k-ésimo*, los k primeros términos $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Se llama también *crónica recurrente* a una sucesión $\{u_n\}$ definida por una ecuación de recurrencia. Esencialmente se quiere:

— resolver la ecuación de recurrencia, es decir determinar u_n *explícitamente* en función de n;

— estudiar el comportamiento asintótico de u_n, es decir, determinar cómo se comporta u_n, cuando n, tiende hacia infinito. En particular, interesa la naturaleza de la sucesión $\{u_n\}$ y se calcula su límite cuando es convergente.

Cuando la función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es lineal en $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_i x_i + \ldots + a_k x_k \quad \text{en donde} \quad \forall i,\ a_i \in \mathbf{R},$$

se llama (abusivamente por otros) (**) *ecuación lineal de recurrencia de coeficientes constantes*, la ecuación (E) correspondiente que se expresa entonces

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k} + g(n) \qquad (1)$$

o bien

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n - a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} - \ldots - a_k u_{n-k} = g(n). \qquad (1')$$

En la ecuación (1′) el primer miembro es una combinación lineal de los términos $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}$ de la *crónica lineal recurrente* $\{u_n\}$.

(*) Como en el tomo 2, se utiliza la notación $\{u_n\}$ para representar la sucesión: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

(**) Hay que observar que únicamente el primer término de la ecuación de recurrencia (1′) es lineal en $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}$.

Cuando $g(n) \equiv 0$, se dice que la ecuación lineal de recurrencia

$$u_n - a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} - \ldots - a_k u_{n-k} = 0 \qquad (H_k)$$

es *homogénea* o *sin segundo miembro*. En el caso contrario, se dice que (1) o (1') es una ecuación lineal de recurrencia *con segundo miembro*.

Se van a resolver en primer lugar las ecuaciones lineales de recurrencia homogéneas, y después las ecuaciones lineales de recurrencia cuyo segundo miembro es una exponencial, un polinomio o una función trigonométrica.

I. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS.

A) Ecuaciones de primer orden.

Las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones de la ecuación lineal de recurrencia de primer orden

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = au_{n-1} \Leftrightarrow u_n - au_{n-1} = 0 \qquad (H_1)$$

son las progresiones geométricas de razón a.

Una sucesión $\{u_n\}$ está determinada cuando se da su *primer término* u_0 y se verifica

$$\forall n > 0, \quad u_n = a^n u_0 \qquad \text{(I. A)}$$

B) Ecuaciones de segundo orden.

1. *Espacio vectorial de las soluciones de una ecuación homogénea.*

   Las soluciones de una ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \Leftrightarrow u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = 0 \qquad (H_2)$$

   forman un espacio vectorial, es decir que toda combinación lineal de soluciones de (H_2) es también una solución H_2. [Ver pág. 92.]

2. *Dimensión del espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea* (H_2).

   Una sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación de recurrencia (H_2) está determinada cuando se dan sus dos primeros términos u_0 y u_1, es decir que a cada vector (u_0, u_1) de dimensión dos está asociada una sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_2). Las soluciones de la ecuación lineal de recurrencia homogénea (H_2) forman entonces un *espacio* *vectorial de dimensión dos* que está engendrado por una base compuesta de dos soluciones linealmente independientes, es decir que toda solución de (H_2) es una combinación lineal de *dos soluciones particulares de* (H_2) *que son linealmente independientes.*

3. *Ecuación característica de la ecuación* (H_2).

Ya que la solución de una ecuación homogénea de primer orden es $u_n = a^n u_0$ es natural, por analogía, el buscar para la ecuación (H_2) soluciones de la forma $u_n = r^n$. Al sustituir, $\forall n \in \mathbf{N}$, r^n por u_n en (H_2) se ve que r verifica la ecuación

$$r^n - ar^{n-1} - br^{n-2} = 0,$$

que puede escribirse, despreciando la solución trivial $r = 0$, y dividiendo por r^{n-2}:

$$r^2 - ar - b = 0. \qquad (C_2)$$

Esta ecuación (C_2) se llama *ecuación característica* de la ecuación lineal de recurrencia homogénea (H_2) y, por extensión, de la ecuación lineal de recurrencia con segundo miembro:

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = g(n).$$

4. *Solución general de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden.*

Según sea el signo de su discriminante $\Delta = a^2 + 4b$, la ecuación característica (C_2): $r^2 - ar - b = 0$, tiene dos raíces reales distintas, una raíz doble o dos raíces complejas conjugadas.

a) Cuando $\Delta = a^2 + 4b > 0$ ó $b > -a^2/4$, la ecuación característica (C_2) tiene dos raíces reales distintas:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \\[2ex] r_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{cases}$$

y las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones generales de la ecuación (H_2), que son las combinaciones lineales de las dos soluciones particulares independientes $\{r_1^n\}$ y $\{r_2^n\}$ de (H_2), tienen por término general

$$u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n. \qquad \text{(I.B.}a\text{)}$$

Para determinar la sucesión $\{u_n\}$ se deben dar dos de sus términos, por ejemplo los dos primeros v_0 y u_1: A_1 y A_2 son entonces soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 r_1^0 + A_2 r_2^0 = A_1 + A_2 \\ u_1 = A_1 r_1 + A_2 r_2 = r_1 A_1 + r_2 A_2 \end{cases}$$

y tienen por expresión

$$A_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}.$$

b) Cuando $\Delta = a^2 + 4b = 0$, ó $b = -a^2/4$, la ecuación característica (C_2) tiene una raíz doble $r = a/2 = \sqrt{-b}$ (ya que $b = -a^2/4$) y las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones generales de la ecuación de recurrencia (H_2), que son las combinaciones lineales de las dos soluciones particulares linealmente independientes de (H_2): $\{r^n\}$ y $\{nr^n\}$ [ver pág. 95], tienen por término general

$$u_n = A_1 r^n + A_2 n r^n = (A_1 + A_2 n) r^n. \qquad \text{(I.B.b)}$$

La sucesión $\{u_n\}$ de la que se conocen los primeros términos u_0 y u_1 está determinada, ya que A_1 y A_2, que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1, \\ u_1 = (A_1 + A_2) r, \end{cases}$$

tienen por expresión

$$A_1 = u_0 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - r u_0}{r} = \frac{2u_1 - a u_0}{a}, \quad \text{pues} \quad r = \frac{a}{2}.$$

c) Cuando $\Delta = a^2 + 4b < 0$ ó $b < -a^2/4$, la ecuación característica (C_3) tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\begin{cases} r_2 = \dfrac{a + i\sqrt{-a^2 - 4b}}{2}, \\ r_2 = \dfrac{a - i\sqrt{-a^2 - 4b}}{2}, \end{cases}$$

(*) Una revisión de los números complejos se impone ante el estudio de este párrafo. Ver en particular páginas 27-30.

de módulo $\rho = \sqrt{-b}$ y de argumento θ y $-\theta$, viniendo definido θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{2\sqrt{-b}}, \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{-a^2-4b}}{2\sqrt{-b}} = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{-b}} \end{cases}$$

Las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones generales de la ecuación de recurrencia (H_2) tienen por término general

$$u_n = A\rho^n e^{in\theta} + B\rho^n e^{-in\theta} = (\sqrt{-b})^n[A\, e^{in\theta} + B\, e^{-in\theta}],$$

en donde A y B son dos números complejos conjugados, $A = x + iy$ y $B = \overline{A} = x - iy$, ya que u_n es un número real para todo entero n y $e^{in\theta}$ y $e^{-in\theta}$ son dos complejos conjugados. Se puede escribir entonces:

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{-b})^n[(A+B)\cos n\theta + i(A-B)\operatorname{sen} n\theta] \\ &= (\sqrt{-b})^n[2x\cos n\theta - 2y\operatorname{sen} n\theta], \end{aligned}$$

o sea

$$u_n = (\sqrt{-b})^n[A_1\cos n\theta + A_2\operatorname{sen} n\theta] \qquad \text{(I.B.c)}$$

haciendo $2x = A_1$ y $(-2y) = A_2$.

La sucesión $\{u_n\}$, en la que se conocen sus dos primeros términos u_0 y u_1 está determinada, ya que A_1 y A_2 que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1, \\ u_1 = \sqrt{-b}[A_1\cos\theta + A_2\operatorname{sen}\theta] \\ \quad = \sqrt{-b}\left[A_1\dfrac{a}{2\sqrt{-b}} + A_2\dfrac{\sqrt{-a^2-4b}}{2\sqrt{-b}}\right] \\ \quad = \dfrac{1}{2}[A_1 a + A_2\sqrt{-a^2-4b}], \end{cases}$$

y tienen por expresión

$$A_1 = u_0 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{2u_1 - au_0}{\sqrt{-a^2-4b}}.$$

C) Ecuaciones de k-ésimo orden.

1. *Espacio vectorial de las soluciones de una ecuación homogénea.*

Las soluciones de una ecuación lineal de recurrencia homogénea de k-ésimo orden

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n - a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} - \dots - a_k u_{n-k} = 0 \quad (H_k)$$

forman un espacio vectorial, es decir que toda combinación lineal de soluciones de (H_k) es también una de (H_k).

2. *Dimensión del espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea* (H_k).

Una sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_k) está determinada cuando se dan sus k primeros términos $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$, es decir que a cada vector $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ de dimensión k va asociada una sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_k). Las soluciones de la ecuación lineal de recurrencia homogénea (H_k) forman entonces un *espacio vectorial de dimensión* k que está engendrado por una base compuesta de k *soluciones particulares independientes de* (H_k).

3. *Ecuación característica de la ecuación* (H_k).

Ya que la solución de una ecuación homogénea de primer orden es $u_n = a^n u_0$ es natural, por analogía, el buscar para la ecuación (H_k) soluciones de la forma $u_n = r^n$. Al sustituir $\forall n \in \mathbf{N}$, r^n por u_n en (H_k) se comprueba que r verifica la ecuación:

$$r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \dots - a_k r^{n-k} = 0$$

que puede escribirse al despreciar la solución trivial $r = 0$ y al dividir por r^{n-k}:

$$r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \dots - a^k = 0. \qquad (C_k)$$

A esta ecuación (C_k) se la denomina *ecuación característica* de la ecuación lineal de recurrencia homogénea (H_k), y por extensión, de la ecuación con segundo miembro (1) ó (1') [ver pág. 61].

4. *Raíces de la ecuación característica* (C_k).

La ecuación característica (C_k):

$$r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \dots - a_k = 0$$

es un polinomio, con coeficientes reales, de grado k. Esta ecuación admite:

— s raíces *reales simples* $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_s$, en donde $0 \leqslant s \leqslant k$;

— m raíces *reales múltiples* (dobles, triples, etc.)

$$r'_1, r'_2, \ldots, r'_j, \ldots, r'_m$$

de orden de multiplicidad $h_1, h_2, \ldots, h_j, \ldots, h_m$, en donde $\forall j$, $1 < h_j \leqslant k$ y

$$1 < \sum_{j=1}^{m} h_j \leqslant k \quad \text{si} \quad m \neq 0;$$

— $2p$ raíces *complejas conjugadas dos a dos, simples o múltiples* $r''_1, \overline{r''_1}, r''_2, \overline{r''_2}, \ldots, r''_p; \overline{r''_p}$; en donde

$0 \leqslant 2p \leqslant k$.

Como la ecuación característica es de grado k, tiene k raíces reales o complejas, simples o múltiples y se tiene la relación

$$s + \sum_{j=1}^{m} h_j + 2p = k.$$

5. *Soluciones particulares independientes de la ecuación* (H_k).

A cada *raíz simple* r_i de la ecuación característica (C_k) está asociado la sucesión $\{u_n\}$ de término general $u_n = r_i^n$; las s sucesiones $\{r_i^n\}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ son s soluciones linealmente independientes de la ecuación (H_k).

A cada *raíz múltiple* r_j' de orden h_j de (C_k) están asociadas h_j sucesiones que tienen respectivamente por término general

$$r_j'^n;\ n r_j'^n;\ n^2 r_j'^n;\ \ldots;\ n^{h_j-1} r_j'^n$$

esas h_j sucesiones constituyen h_j soluciones linealmente independientes entre sí e independientes de las soluciones deducidas de las otras raíces simples o múltiples de la ecuación característica (C_k).

A cada par de *raíces complejas conjugadas múltiples* $r'' = \rho e^{i\theta}$ y $\overline{r''} = \rho e^{-i\theta}$ soluciones de (H_k) que se combinan para dar

$$\rho^n(\mu \cos n\theta + \mu' \operatorname{sen} n\theta),$$

en donde μ y μ' son dos constantes.

A cada par de *raíces complejas conjugadas múltiples* de orden h: $r'' = \rho\, e^{i\theta}$ y $\overline{r''} = \rho\, e^{-i\theta}$, están asociadas $2h$ sucesiones:

$$\rho^n e^{in\theta};\ n\,\rho^n e^{in\theta};\ n^2 \rho^n e^{in\theta};\ \ldots;\ n^{h-1} \rho^n e^{in\theta}$$
$$\text{y} \quad \rho^n e^{-in\theta};\ n\,\rho^n e^{-in\theta};\ n^2 \rho^n e^{-in\theta};\ \ldots;\ n^{h-1} \rho^n e^{-in\theta}$$

soluciones de (H_k) que se combinan para dar

$$\rho^n[(\mu_0 + \mu_1 n + \ldots + \mu_{h-1} n^{h-1}) \cos n\theta + (\mu'_0 + \mu'_1 n + \ldots + \mu'_{h-1} n^{h-1}) \operatorname{sen} n\theta].$$

6. *Solución general de la ecuación de recurrencia homogénea* (H_k).

Consideremos las raíces simples, reales o complejas, de una ecuación que tiene raíces múltiples de orden 1; la solución general de la ecuación de recurrencia homogénea (H_k), cuya ecuación característica (C_k) tiene m raíces reales distintas y $2p$ raíces complejas distintas, es una combinación lineal de las

$$k = \sum_{i=1}^{m} h_i + 2 \sum_{j=1}^{p} h_j$$

soluciones particulares linealmente independientes de (H_k) y se puede escribir:

$$\begin{aligned} u^n = & \sum_{i=1}^{m} (\lambda_{i,0} + \lambda_{i,1} n + \ldots + \lambda_{i,h_{i-1}} n^{h_{i-1}}) r_i^n + \\ & + \sum_{j=1}^{p} [(\mu_{j,0} + \mu_{j,1} n + \ldots + \mu_{j,h_{j-1}} n^{h_{j-1}}) \cos n\theta_j \\ & + (\mu'_{j,0} + \mu'_{j,1} n + \ldots + \mu'_{j,h_{j-1}} n^{h_{j-1}}) \operatorname{sen} n\theta_j] \rho_j^n . \qquad (S) \end{aligned}$$

La sucesión $\{u_n\}$ cuyos k primeros términos $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ se conocen, está determinada, ya que los k coeficientes:

$$\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{m,h_m-1}, \mu_{1,0}, \mu_{1,1}, \ldots, \mu_{p,h_p-1}, \mu'_{1,0}, \ldots, \mu'_{p,h_p-1}$$

son soluciones del siguiente sistema de k ecuaciones con k incógnitas:

$$\left\{ \begin{aligned} u_0 = & \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,0} + \sum_{j=1}^{p} \mu_{j,0}, \\ u_1 = & \sum_{i=1}^{m} [\lambda_{i,0} + \lambda_{i,1} + \ldots + \lambda_{i,h_i-1}] r_i + \\ & + \sum_{j=1}^{p} [(\mu_{j,0} + \mu_{j,1} + \ldots + \mu_{j,h_j-1}) \cos \theta_j + \\ & + (\mu'_{j,0} + \mu'_{j,1} + \ldots + \mu'_{j,h_j-1}) \operatorname{sen} \theta_j] \rho_j, \\ & \vdots \\ u_{k-1} = & \sum_{j=1}^{m} [\lambda_{i,0} + \lambda_{i,1} (k-1) + \ldots + \lambda_{i,h_i-1}(k-1)^{h_i-1}] r_i^{k-1} + \\ & + \sum_{j=1}^{p} [(\mu_{j,0} + \mu_{j,1}(k-1) + \ldots + \mu_{j,h_j-1}(k-1)^{h_j-1}) \cos (k-1) \theta_j + \\ & + (\mu'_{j,0} + \ldots + \mu'_{j,h_j-1}(k-1)^{h_j-1}) \operatorname{sen} (k-1) \theta_j] \rho_j^{k-1}. \end{aligned} \right.$$

II. ECUACIONES LINEALES CON SEGUNDO MIEMBRO.

Si la sucesión $\{v_n\}$ es una solución cualquiera de la ecuación de recurrencia con segundo miembro

$$v_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} - \dots - a_k v_{n-k} = g(n) \qquad (E_k)$$

y la sucesión $\{v_n^*\}$ es una solución particular de la ecuación (E_k), la sucesión $\{u_n\}$ de término general $u_n = v_n - v_n^*$ es solución de la ecuación lineal homogénea:

$$u_n - a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} - \dots - a_k u_{n-k} = 0 \qquad (H_k)$$

y se puede enunciar, ya que $v_n = u_n + v_n^*$, el teorema:

La *solución general* v_n^* de la ecuación lineal de recurrencia *con segundo miembro* (E_k) es igual a la suma de la *solución general* u_n *de la ecuación homogénea* (H_k) y de una *solución particular* v_n^* *de la ecuación con segundo miembro* (E_k).

Hemos ya determinado en **I** la solución general u_n de la ecuación homogénea (H_k); basta entonces hallar las soluciones particulares v_n^* de la ecuación lineal de recurrencia con segundo miembro (E_k). Esta solución particular v_n es, en general, de la forma del segundo miembro $g(n)$ de la ecuación (E_k). Nos limitaremos a los casos en que la función $g(n)$ sea una exponencial q^n, una función circular sen $n\theta$ o cos $n\theta$, un polinomio $P_m(n)$ de grado m o un producto de esas funciones.

A) Ecuaciones de primer orden.

1. *El segundo miembro es una exponencial*:

$$v_n - av_{n-1} = Aq^n \qquad (E_1)$$

en donde a, A y q son tres constantes.

Si $q \neq a$, una solución particular de (E_1) es $v_n^* = Cq^n$.

Sustituyendo Cq^n por v_n en (E_1) se obtiene:

$$Cq^n - aCq^{n-1} = Aq^n \;\Rightarrow\; Cq^n\left(1 - \frac{a}{q}\right) = Aq^n$$

$$\Rightarrow\; C = \frac{Aq}{q-a} \;\Rightarrow\; v_n^* = \frac{Aq}{q-a}\,q^n$$

y ya que la solución de la ecuación homogénea (H_1) es $u_n = a^n u_0$, la solución general de (E_1) es

$$v_n = u_n + v_n^* = a^n u_0 + \frac{Aq}{q-a} q^n = a^n(v_0 - v_0^*) + \frac{Aq}{q-a} q^n$$
$$= a^n v_0 + Aq \frac{q^n - a^n}{q-a}.$$

Si $q = a$, una solución particular de (E_1) es $v_n^* = Cnq^n = Cna^n$. Sustituyendo Cna^n por v_n en (E_1) se obtiene:

$$Cna^n - aC(n-1)a^{n-1} = Aa^n \Rightarrow Ca^n(n-n+1) = Aa^n$$
$$\Rightarrow C = A \Rightarrow v_n^* = Ana^n$$

y la solución general de (E_1) es:

$$v_n = u_n + v_n^* = a^n u_0 + Ana^n = a^n(v_0 - v_0^*) + Ana^n = (v_0 + An)\,a^n.$$

Entonces:

$$v_n - av_{n-1} = Aq^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_n = a^n v_0 + Aq \dfrac{q^n - a^n}{q-a} & \text{si } q \neq a, \quad \text{(II.A.1}_1\text{)} \\ v_n = (v_0 + An)\,a^n & \text{si } q = a. \quad \text{(II.A.1}_2\text{)} \end{cases}$$

2. *El segundo miembro es una constante*:

$$v_n - av_{n-1} = A.$$

Esta ecuación se obtiene haciendo $q = 1$ en la ecuación (E_1) y tiene por solución general

$$\begin{cases} v_n = a^n v_0 + \dfrac{1-a^n}{1-a} & \text{si } a \neq 1, \quad \text{(II.A.2}_1\text{)} \\ v_n = v_0 + An & \text{si } a = 1. \quad \text{(II.A.2}_2\text{)} \end{cases}$$

3. *El segundo miembro es un polinomio de grado m*:

$$v_n - av_{n-1} = P_m(n). \qquad (E_1')$$

Si $a \neq 1$, una solución particular de (E_1') es

$$v_n^* = Q_m(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_m n^m$$

Sustituyendo $Q_m(n)$ por v_n en la ecuación (E'_1) se obtiene:

$$Q_m(n) - aQ_m(n-1) = P_m(n)$$

lo que nos permite calcular los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $Q_m(n)$ identificando los términos en $n^0, n^1, n^2, \ldots, n^m$ en ambos miembros de esa identidad. La solución general de (E'_1) es:

$$v_n = a^n u_0 + v^*_n = a^n(v_0 - v^*_0) + Q_m(n) = \\ = a^n(v_0 - Q_m(0)) + Q_m(n). \qquad \text{(II.A.3}_1\text{)}$$

Si $a = 1$, una solución particular de (E'_1) es

$$v^*_n = nQ_m(n) = \alpha_0 n + \alpha_1 n^2 + \ldots + \alpha_n n^{m+1}.$$

Al sustituir $nQ_m(n)$ por v_n en la ecuación (E'_1) se obtiene, ya que $a = 1$:

$$nQ_m(n) - (n-1)\, Q_m(n-1) = P_m(n)$$

lo que nos permite determinar los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $Q_m(n)$ identificando los términos en $n^0, n^1, n^2, \ldots, n^m$ en ambos miembros de esa identidad. La solución general de (E'_1) es:

$$v_n = a^n u_0 + v^*_n = u_0 + nQ_m(n) \\ = v_0 - v^*_0 + nQ_m(n) = v_0 + nQ_m(n). \qquad \text{(II.A.3}_2\text{)}$$

4. *El segundo miembro es una función circular*:

$$v_n - av_{n-1} = A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha, \qquad (E''_1)$$

en donde a, A, B y α son cuatro constantes.

Una solución particular de (E''_1) es $v^*_n = \lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha$. Sustituyendo $\lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha$ por v_n en (E''_1) se obtiene

$$\lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha - a\lambda \cos (n-1)\, \alpha - a\mu \operatorname{sen} (n-1)\, \alpha = \\ = A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha,$$

o bien

$$\cos n\alpha[\lambda(1 - a \cos \alpha) + a\mu \operatorname{sen} \alpha] + \operatorname{sen} n\alpha[- a\lambda \operatorname{sen} \alpha + \\ + \mu(1 - a \cos \alpha)] = A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha.$$

Las constantes λ y μ ,soluciones del sistema

$$\begin{cases} \lambda(1 - a \cos \alpha) + \mu a \operatorname{sen} \alpha = A, \\ \lambda(- a \operatorname{sen} \alpha) + \mu(1 - a \cos \alpha) = B, \end{cases}$$

tienen por expresión

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{A(1-a\cos\alpha) - aB \operatorname{sen} \alpha}{a^2+1-2a\cos\alpha}, \\[2ex] \mu = \dfrac{aA \operatorname{sen} \alpha + B(1-a\cos\alpha)}{a^2+1-2a\cos\alpha}, \end{cases}$$

y la solución general de (E_1'') es:

$$\begin{aligned} v_n = u_n + v_n^* &= a^n u_0 + v_n^* = a^n(v_0 - v_0^*) + v_n^* \\ &= a^n(v_0 - \lambda) + \lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha. \quad \text{(II.A.4)} \end{aligned}$$

B) Ecuaciones de segundo orden.

1. *El segundo miembro es una exponencial*:

$$v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = Aq^n \qquad (E_2)$$

en donde a, b, A y q son constantes. Se designa por u_n la solución general de la ecuación homogénea $u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = 0$.

Si $q^2 - aq - b \neq 0$, es decir si q no es raíz de la ecuación característica $r^2 - ar - b = 0$ de (E_2), una solución particular de (E_2) es $v_n^* = Cq$. Al sustituir Cq^n por v_n en (E_2), se obtiene:

$$Cq^n - aCq^{n-1} - bCq^{n-2} = Aq^n \Rightarrow Cq^{n-2}(q^2 - aq - b) = Aq^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = \frac{Aq^2}{q^2 - aq - b} \Rightarrow v_n^* = \frac{Aq^2}{q^2 - aq - b} q^n$$

Si $q^2 - aq - b = 0$ y $aq + 2b \neq 0$, es decir si q es *raíz simple* de la ecuación característica $r^2 - ar - b = 0$, de (E_2) (pues si q es raíz doble, $q = a/2$ y $aq + 2b = (a^2+4b)/2 = 0$), una solución particular de (E_2) es $v_n^* = Cnq^n$. Sustituyendo Cnq^n por v_n en (E_2) se obtiene

$$Cnq^n - aC(n-1)q^{n-1} - bC(n-2)q^{n-2} = Aq^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Cq^{n-2}[n\underbrace{(q^2 - aq - b)}_{=0} + aq + 2b] = Aq^n \Rightarrow C = \frac{Aq^2}{aq + 2b}$$

y

$$v_n^* = \frac{Aq^2}{aq + 2b} nq^n$$

Si $q^2 - aq - b = 0$ y $aq + 2b = 0$, es decir si $q(= a/2 = = \sqrt{-b})$ es *raíz doble* de la ecuación característica $r^2 - ar - b = 0$ de (E_2), una solución particular de (E_2) es $v_n^* = Cn^2 q^n$. Sustituyendo $Cn^2 q^n$ por v_n en (E_2) se obtiene

$$Cn^2 q^n - aC(n-1)^2 q^{n-1} - bC(n-2)^2 q^{n-2} = Aq^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cq^{n-2}[n^2\underbrace{(q^2 - aq - b)}_{=0} + 2n\underbrace{(aq + 2b)}_{=0} - (aq + 4b)] = Aq^n.$$

y

$$C = \frac{Aq^2}{-(aq + 4b)} = \frac{Aq^2}{-2b} = \frac{Aq^2}{2q^2} = \frac{A}{2}$$

$$\text{pues } aq + 2b = 0 \quad \text{y} \quad q = \sqrt{-b}.$$

Luego

$$v_n^* = \frac{A}{2} n^2 q^n$$

La solución general de (E_2) es pues:

$$\left\{\begin{array}{ll} v_n = u_n + \dfrac{Aq^2}{q^2 - aq - b} q^n & \\ \qquad \text{si } q \text{ no es raíz de } r^2 - ar - b = 0, & \text{(II.B.1}_1\text{)} \\ v_n = u_n + \dfrac{Aq^2}{aq + 2b} nq^n & \\ \qquad \text{si } q \text{ es raíz simple de } r^2 - ar - b = 0, & \text{(II.B.1}_2\text{)} \\ v_n = u_n + \dfrac{A}{2} n^2 q^n & \\ \qquad \text{si } q \text{ es raíz doble de } r^2 - ar - b = 0. & \text{(II.B.1}_3\text{)} \end{array}\right.$$

2. *El segundo miembro es una constante*:

$$v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = A.$$

Esta ecuación se obtiene eligiendo $q = 1$ en la ecuación (E_2) y tiene por solución general

$$\left\{\begin{array}{ll} v_n = u_n + \dfrac{A}{1-a-b} & \\ & \text{si 1 no es raíz de } r^2 - ar - b = 0, \quad \text{(II.B.2}_1\text{)} \\ v_n = u_n + \dfrac{A}{a+2b}\, n & \\ & \text{si 1 es raíz simple de } r^2 - ar - b = 0, \quad \text{(II.B.2}_2\text{)} \\ v_n = u_n + \dfrac{A}{2} n^2 & \\ & \text{si 1 es raíz doble de } r^2 - ar - b = 0. \quad \text{(II.B.2}_3\text{)} \end{array}\right.$$

3. *El segundo miembro es un polinomio de grado m:*

$$v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = P_m(n). \qquad (E_2')$$

Si 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - ar - b = 0$, una solución particular de (E_2') es

$$v_n^* = Q_m(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_m n^m.$$

Sustituyendo $Q_m(n)$ por v_n en la ecuación (E_2') se obtiene:

$$Q_m(n) - aQ_m(n-1) - bQ_m(n-2) = P_m(n)$$

lo que nos permite obtener los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $Q_m(n)$ por identificación de los términos en $n^0, n^1, n^2, \ldots, n^m$ en los dos miembros de esta identidad.

Si 1 es raíz simple de $a^2 - ar - b = 0$, una solución particular de (E_2') es

$$v_n^* = nQ_m(n) = \alpha_0 n + \alpha_1 n^2 + \ldots + \alpha_m n^{m+1}.$$

Si 1 es raíz doble de $r^2 - ar - b = 0$, una solución particular de (E_2') es

$$v_n^* = n^2 Q_m(n) = \alpha_0 n^2 + \alpha_1 n^3 + \ldots + \alpha_m n^{m+2}.$$

4. *El segundo miembro es una función circular:*

$$v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha. \qquad (E_2'')$$

Si $A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha$ no es solución de la ecuación homogénea $u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = 0$, $v_n^* = \lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha$ es una solución particular de (E_2'').

Si $A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha$ es solución de la ecuación homogénea $u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = 0$, $v_n^* = n(\lambda \cos n\alpha + \mu \operatorname{sen} n\alpha)$ es una solución particular de (E_2'').

5. *El segundo miembro es una suma de funciones*:

$$v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = g_1(n) + g_2(n).$$

La solución general de esta ecuación es $v_n = u_n + v_n^{(1)*} + v_n^{(2)*}$; en donde:

$$\begin{cases} v_n^{(1)*} \text{ es una solución particular de } v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = g_1(n), \\ v_n^{(2)*} \text{ es una solución particular de } v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = g_2(n). \end{cases}$$

C) Ecuaciones de *k*-ésimo orden.

1. *El segundo miembro es una exponencial*:

$$v_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} - \dots - a_k v_{n-k} = Aq^n. \qquad (E_k)$$

Si q *no es raíz* de la ecuación característica

$$r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a_k = 0,$$

una solución particular de (E_k) es $v_n^* = Cq^n$

Si q es raíz múltiple de orden h de la ecuación característica $r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a_k = 0$, una solución particular de (E_2) es

$$v_n^* = Cn^h q^n \qquad (h = 1,\ 2,\ \dots,\ k).$$

2. *El segundo miembro es una constante*:

$$v_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} - \dots - a_k v_{n-k} = A.$$

Esta ecuación se obtiene haciendo $q = 1$ en la ecuación (E_k) y tiene por solución particular:

$v_n^* = C$ si 1 no es raíz de la ecuación característica

$$r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a^k = 0;$$

$v_n^* = Cn^h$ si 1 es raíz múltiple de orden h ($h=1,\ 2,\ \dots,\ k$) de la ecuación característica.

3. *El segundo miembro es un polinomio de grado m*:

$$v_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} - \dots - a_k v_{n-k} = P_m(n). \qquad (E'_k)$$

Si 1 *no es raíz* de la ecuación característica

$$r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a_k = 0,$$

una solución particular de (E'_k) es

$$v_n^* = Q_m(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + a_m n^m.$$

Si 1 es *raíz múltiple de orden* h ($h = 1, 2, \ldots, k$) de la ecuación característica, una solución particular de (E'_k) es

$$v^*_n = n^h\, Q_m(n) = a_0\, n^h + a_1\, n^{h+1} + \ldots + a_m\, n^{h+m}$$

4. *El segundo miembro es una función circular:*

$$v_n - a_1\, v_{n-1} - a_2\, v_{n-2} - \ldots - a_k\, v_{n-k} = A \operatorname{sen} n\alpha + B \cos n\alpha. \quad (E''_k)$$

Si $A \operatorname{sen} n\alpha + B \cos n\alpha$ *no es solución* de la ecuación homogénea

$$u_n - a_1\, u_{n-1} - a_2\, u_{n-2} - \ldots - a_k\, u_{n-k} = 0 \qquad (H_k)$$

$v^*_n = A_1 \cos n\,\alpha + A_2 \operatorname{sen} n\alpha$ es una solución particular de (E''_k).

Si $A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha$ es raíz múltiple de orden h de la ecuación homogénea (H_k), $v^*_n = (A_1 \cos n\alpha + A_2 \operatorname{sen} n\alpha)\ n^h$ es una solución particular de (E''_k).

III. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE RECURRENCIA HOMOGENEAS.

A) Sistema de dos ecuaciones.

El sistema

$$(S_1) \begin{cases} x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \\ y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}, \end{cases}$$

que se escribe, en forma matricial:

$$\mathbf{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{X}_{n-1} \qquad (1)$$

en donde:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

define, cuando se dan x_0 e y_0, dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

Para resolver el sistema (S_1) o la ecuación matricial (1):

$$\mathbf{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{X}_{n-1},$$

se pone, por analogía con las ecuaciones lineales homogéneas,

$$\mathbf{X}_n = r^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo $r^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ por $\mathbf{X}_n$ en la ecuación (1), se obtiene

$$r^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} r^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad r \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

y se comprueba que el número r es un *valor propio* de la matriz $\boldsymbol{M}$ y que $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ es el *vector propio* asociado a r.

Se sabe que r es raíz de la ecuación característica de la matriz

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{a saber} \quad r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0.$$

Tres casos se distinguen según el signo del discriminante de la ecuación característica

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4\,bc.$$

1. Cuando $\Delta = (a-d)^2 + 4\,bc > 0$, la matriz tiene dos valores propios reales r_1 y r_2 a los que corresponden dos vectores propios linealmente independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. La solución general de la ecuación matricial (1) o del sistema (S_1) es

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda r_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \mu r_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.A.1)}$$

   Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, están determinadas cuando se conoce el vector $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ya que λ y μ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ y_0 = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \end{cases}$$

   y tienen por expresión

$$\lambda = \frac{\alpha_2 x_0 - y_0}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{y_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

2. Cuando $\Delta = (a-d)^2 + 4\,bc = 0$ la matriz tiene un valor propio doble $r = (a+d)/2$, al cual va asociado el vector propio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{d-a}{2b} \end{pmatrix}$$

y la solución general del sistema (S_1) es

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right] r^n. \qquad \text{(III.A.2)}$$

Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ están determinadas cuando se da el vector $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, ya que λ, que es solución de la ecuación $x_1 = ax_0 + by_0 = (x_0 + \lambda)\, r$, tiene por expresión

$$\lambda = \frac{(a - r)\, x_0 + by_0}{r}.$$

3. Cuando $\Delta = (a - d)^2 + 4\,\mathrm{bc} < 0$ las raíces de la ecuación característica son números complejos conjugados de módulo $r = \sqrt{ad - bc}$ y de argumentos θ y $-\theta$, estando definido θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a + d}{2\sqrt{ad - bc}} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{-(a - d)^2 - 4\,bc}}{2\sqrt{ad - bc}} \end{cases}$$

y la solución general del sistema (S_1) es

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cos n\theta + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \operatorname{sen} n\theta \right]. \qquad \text{(III.A.3)}$$

Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ están determinadas cuando se da el vector $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ya que λ y μ que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 = r(x_0 \cos\theta + \lambda \operatorname{sen}\theta), \\ y_1 = cx_0 + dy_0 = r(y_0 \cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta), \end{cases}$$

tienen por expresión

$$\lambda = \frac{(a - r\cos\theta)\, x_0 + by_0}{r \operatorname{sen}\theta} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{cx_0 + (d - r\cos\theta)\, y_0}{r \operatorname{sen}\theta}.$$

4. *Observación importante.*

Si en el sistema

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} \\ y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{X}_{n-1},$$

se elimina y_{n-1} [respectivamente x_{n-1}], se obtiene:

$$dx_n - by_n = (ad - bc)\,x_{n-1} \text{ [resp. } ay_n - cx_n = (ad - bc)\,y_{n-1}]$$

y se tiene

$$by_{n-1} = dx_{n-1} - (ad - bc)\,x_{n-2}$$
$$\text{[resp. } cx_{n-1} = ay_{n-1} - (ad - bc)\,y_{n-2}],$$

o sea

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} = (a + d)\,x_{n-1} - (ad - bc)\,x_{n-2}$$
$$\text{[resp. } y_n = (a + d)\,y_{n-1} + (ad - bc)\,y_{n-2}],$$

es decir que las componentes x_n e y_n del vector $\mathbf{X}_n$ son soluciones de la misma ecuación de recurrencia lineal homogénea:

$$u_n = (a + d)\,u_{n-1} - (ad - bc)\,u_{n-2},$$

cuya ecuación característica $r^2 = (a + d)\,r - (ad - bc)$ es la misma que la de la matriz $\boldsymbol{M}$, lo que justifica la semejanza de los resultados de I.B. y de III.A.

B) Sistema de k ecuaciones.

El sistema

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_n^{(1)} = a_{11}\,x_{n-1}^{(1)} + \dots + a_{1l}\,x_{n-1}^{(l)} + \dots + a_{1k}\,x_{n-1}^{(k)} \\ x_n^{(2)} = a_{21}\,x_{n-1}^{(1)} + \dots + a_{2l}\,x_{n-1}^{(l)} + \dots + a_{2k}\,x_{n-1}^{(k)} \\ \quad\vdots \\ x_n^{(l)} = a_{l1}\,x_{n-1}^{(1)} + \dots + a_{ll}\,x_{n-1}^{(l)} + \dots + a_{lk}\,x_{n-1}^{(k)} \\ \quad\vdots \\ x_n^{(k)} = a_{k1}\,x_{n-1}^{(1)} + \dots + a_{kl}\,x_{n-1}^{(l)} + \dots + a_{kk}\,x_{n-1}^{(k)} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(l)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} & \dots & a_{lk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(l)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{X}_{n-1}$$

define k sucesiones $\{x^{(1)}_n\} \dots \{x^{(l)}_n\} \dots \{x^{(k)}_n\}$ que son soluciones de la misma ecuación de recurrencia de k-ésimo orden

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} \qquad (H_k)$$

que tiene igual ecuación característica

$$r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_k \qquad (C_k)$$

que la matriz M de los coeficientes del sistema (S).

De ello resulta que $\forall l = 1, 2, \dots, k$, se tiene

$$x^{(l)}_n = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_{i,0} + \lambda_{i,1} n + \dots + \lambda_{i,h_i-1} n^{h_i-1}] r_i^n +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\mu_{j,0} + \mu_{j,1} n + \dots + \mu_{j,h_j-1} n^{h_j-1}) \cos n\theta_j +$$

$$+ (\mu'_{j,0} + \mu'_{j,1} n + \dots + \mu'_{j,h_j-1} n^{h_j-1}) \operatorname{sen} n\theta_j] \rho_j^n,$$

en donde las r_i son las raíces reales de orden h_i de la ecuación (C_k) y las ρ_j y las θ_j los módulos y los argumentos de las raíces complejas de orden h_j de (C_k).

PROBLEMA II

1) Se considera la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2}. \qquad (H_2')$$

a) Calcular sucesivamente los siete primeros términos de la sucesión $\{u'_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u'_0 = 1 \text{ y } u'_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } (H_2'): \ u'_n = 5\,u'_{n-1} - 6\,u'_{n-2}. \end{cases}$$

b) Calcular sucesivamente los siete primeros términos de la sucesión $\{u''_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u''_0 = 2 \text{ y } u''_1 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } (H_2'): \ u''_n = 5\,u''_{n-1} - 6\,u''_{n-2}\,. \end{cases}$$

c) Calcular sucesivamente los siete primeros términos de la serie $\{v_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } v_0 = u'_0 + u''_0 = 3 \text{ y } v_1 = u'_1 + u''_1 = 4, \\ \text{la relación de recurrencia } (H_2'): \ v_n = 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2}. \end{cases}$$

Demostrar que $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene la identidad $v_n = u'_n + u''_n$.

d) Calcular sucesivamente, en función de λ y μ ($\lambda \in \mathbf{R}$ y $\mu \in \mathbf{R}$), los siete primeros términos de la sucesión $\{u_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = \lambda u'_0 + \mu u''_0 = \lambda + 2\mu \text{ y} \\ \qquad u_1 = \lambda u'_1 + \mu u''_1 = \lambda + 3\mu, \\ \text{la relación de recurrencia } (H_2'): \ u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2}. \end{cases}$$

Demostrar que, $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene la identidad $u_n = \lambda u'_n + \mu u''_n$.

e) Sea $\mathbf{R}^2$ el espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales y $\mathbf{S}$ el conjunto de las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones de la ecuación de recurrencia (H_2'):

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2}.$$

Se considera la aplicación f que asocia a cada vector $u=(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ la sucesión $f(u) = \{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in \mathbf{S}$.

α) Demostrar que la aplicación $u \multimap f(u)$ es biyectiva.

β) Demostrar que la aplicación $u \multimap f(u)$ es lineal.

Deducir la estructura algebraica del conjunto $\mathbf{S}$ de las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones de la ecuación (H_2').

γ) Determinar los números r' y r'' tales que las series $\{r'^n\}$ y $\{r''^n\}$ pertenezcan al espacio vectorial $\mathbf{S}$. Demostrar que los vectores $u' = (1, r')$ y $u'' = (1, r'')$ de $\mathbf{R}^2$, que tienen imagen en $\mathbf{S}$ las sucesiones $\{r'^n\}$ y $\{r''^n\}$, son linealmente independientes.

δ) Deducir la expresión del término general de la sucesión $\{u_n\}$, de $\mathbf{S}$ cuyos valores iniciales son $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$.

Calcular u_2, u_3, u_4, u_5 y u_6 *y* comparar esos resultados con los de *a*).

ε) ¿Cuál es el comportamiento asintótico de u_n?

2) Se considera la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden:

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}. \qquad (H_2)$$

a) Demostrar que si las sucesivas $\{u'_n\}$ y $\{u''_n\}$ son soluciones de (H_2), la sucesión $\{u_n\} = \{\lambda u'_n + \mu u''_n\}$ en donde λ y $\mu \in \mathbf{R}$, **es también** solución de (H_2). ¿Cuál es la estructura algebraica del conjunto $\mathbf{S}$ de las soluciones de la ecuación (H_2)?

b) Se considera la sucesión $\{v_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } v_0 \text{ y } v_1, \\ \text{la relación de recurrencia } v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}. \end{cases}$$

Calcular $\Delta v_n = v_n - v_{n-1}$ en función de v_1 y v_0. Deducir la expresión del término general v_n de la sucesión $\{v_n\}$ en función de v_1 y de v_0.

c) Se considera la sucesión $\{v_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 \text{ y } u_1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = au_{n-1} - \dfrac{a^2}{4} u_{n-2}. \end{cases}$$

¿Cuáles son las raíces de la ecuación característica de la ecuación de recurrencia? Demostrar que la sucesión $\{v_n\}$, cuyo término general es $v_n = \left(\dfrac{2}{a}\right)^n u_n$, es solución de la ecuación de recurrencia $v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}$.

Deducir la expresión de v_n, y después la de u_n, en función de u_0 y de u_1. ¿Para qué valores de a, la sucesión $\{u_n\}$ es convergente?

3) Se considera la ecuación lineal de recurrencia homogénea de tercer orden

$$u_n = 3\,au_{n-1} - 3\,a^2 u_{n-2} + a^3 u_{n-3}, \text{ en donde } a \in \mathbf{R}. \qquad (H_3)$$

a) Demostrar que su ecuación característica tiene tres raíces reales confundidas r, las cuales se pide determinar.

b) Demostrar que las sucesiones $\{r^n\}$, $\{nr^n\}$ y $\{n^2 r^n\}$, son tres soluciones independientes de la ecuación (H_3).

c) Deducir la expresión del término general de la sucesión $\{u_n\}$, de $\mathbf{S}$ cuyos valores iniciales son $u_0 = 1$, $u_1 = 2\,a$ y $u_2 = 7\,a^2$. Calcular u_7 y u_{10}. ¿Para qué valores de a la sucesión $\{u_n\}$ es convergente?

4) *a*) Calcular de forma sucesiva los términos u_1, u_2, u_3 y u_4 de la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = 5 \\ \text{la relación } u_n = 2\,u_{n-1} \text{ para todo entero } n \geqslant 1. \end{cases}$$

¿Cómo se comporta u_n cuando n se hace infinito?

b) Calcular de forma sucesiva los términos u_1, u_2, u_3 y u_4 de la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación } u_n = u_{n-1}/3 \text{ para todo entero } n \geqslant 1. \end{cases}$$

¿Cómo se comporta u_n cuando n se hace infinito?

c) Calcular el término general de la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = 0, \\ \text{la relación } u_n = u_{n-1} + n \text{ para todo entero } n \geqslant 1. \end{cases}$$

5) Discutir cualitativamente (creciente, decreciente, oscilaciones) y dar una interpretación gráfica de las crónicas lineales siguientes:

a) $u_n = 2\,u_{n-1}$ y $u_0 = a$;
b) $u_n = \frac{1}{3}\,u_{n-1}$ y $u_0 = a$;
c) $u_n = -\,u_{n-1}$ y $u_0 = a$;
d) $u_n = -\,3\,u_{n-1}$ y $u_0 = a$;
e) $u_n = -\,\frac{1}{2}\,u_{n-1}$ y $u_0 = a$;

en donde $a \in \mathbf{R}^+$.

6) Se considera la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 \text{ y } u_1, \\ \text{la relación } u_n = {}^5/_2\,u_{n-1} + {}^3/_2\,u_{n-2}. \end{cases}$$

a) Calcular su término general u_n en función de u_0 y de u_1.

b) Estudiar, según los valores de u_0 y de u_1, el comportamiento asintótico de u_n. Deducir los valores aproximados de u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{30} y u_{50} cuando

α) $u_0 = 4$ y $u_1 = 5$,
β) $u_0 = 2$ y $u_1 = -1$.

c) ¿Cuál es la expresión del término general u_n cuando $u_0 = 1$ y $u_1 = 3$?, ¿cuándo $u_0 = 1$ y $u_1 = -\dfrac{1}{2}$? ¿Podría preverse ese resultado?

7) Se considera la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación } u_n = 6\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2}. \end{cases}$$

a) Calcular sucesivamente u_2, u_3, u_4, u_5 y u_6.

b) Determinar la expresión de su término general u_n y obtener los resultados de *a*).

c) ¿En qué se transforman u_n cuando n aumenta indefinidamente?

8) Se considera la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 4 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación } u_n = u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$$

a) Calcular sucesivamente u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 y u_7. ¿Qué propiedad tiene esta serie?

b) Calcular el término general u_n de esta sucesión y representar gráficamente u_n en función de n.

9) Se considera la sucesión de recurrencia definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación } u_n = 2\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2}. \end{cases}$$

Calcular el término general u_n de esta sucesión ¿Qué propiedad tiene esta sucesión? Representar gráficamente u_n en función de n para los primeros valores de n.

10) Discutir cualitativamente (creciente, decreciente, oscilaciones) y dar una interpretación de las crónicas lineales definidas por:

a) $u_n = 4\,u_{n-1} - 3\,u_{n-2}$ y $u_0 = 1$, $u_1 = 4$;

b) $u_n = \dfrac{5}{6}\,u_{n-1} - \dfrac{1}{6}\,u_{n-2}$ y $u_0 = 3$, $u_1 = 2$;

c) $u_n = -\frac{1}{6}u_{n-1} + \frac{1}{6}u_{n-2}$ y $u_0 = 6,\ u_1 = 1;$

d) $u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ y $u_0 = 5,\ u_1 = 1;$

e) $u_n = u_{n-1}\sqrt{3} - u_{n-2}$ y $u_0 = 2,\ u_1 = 3 + \sqrt{3};$

f) $u_n = u_{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\ u_1 = \sqrt{2};$

g) $u_n = 3u_{n-1} - 9u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\ u_1 = 3.$

11 a) Determinar la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden que tiene por solución las sucesiones $\{u_n\}$, cuyo término general es de la forma $u_n = A_1 3^n + A_2 5^n$. ¿Cómo hay que elegir u_0 y u_1 para definir la sucesión $\{u_n\}$ de término general $u_n = {}^3/_2 \cdot 3^n - {}^1/_2 \cdot 5^n$?

b) Determinar la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden que tiene por soluciones las sucesiones $\{u_n\}$, cuyo término general es de la forma $u_n = (A_1 + A_2 n) 5^n$. ¿Cómo hay que elegir u_0 y u_1 para definir la sucesión $\{u_n\}$ de término general $u_n = (2 - 3n) 5^n$?

c) Determinar la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden, que tiene por soluciones las sucesiones $\{u_n\}$, cuyo término general es de la forma

$$u_n = A_1 \cos\frac{n\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}.$$

¿Cómo hay que elegir u_0 y u_1 para definir la sucesión $\{u_n\}$ de término general

$$u_n = 2\cos\frac{n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}?$$

d) Determinar la ecuación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden que tiene por soluciones las sucesiones $\{u_n\}$ cuyo término general es de la forma

$$u_n = 3^n \left[A_1 \cos\frac{n\pi}{6} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right].$$

¿Cómo hay que elegir u_0 y u_1 para definir la sucesión $\{u_n\}$ de término general

$$u_n = 3^n \left[\cos\frac{n\pi}{6} + 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right]?$$

12) Determinar el término general u_n de las sucesiones $\{u_n\}$ definidas por

a) $u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3}$ y $u_0 = 6,\ u_1 = 11,\ u_2 = 23$;
b) $u_n = 7u_{n-1} - 16u_{n-2} + 12u_{n-3}$ y $u_0 = 1,\ u_1 = 10,\ u_2 = 38$;
c) $u_n = 9u_{n-1} - 27u_{n-2} + 27u_{n-3}$ y $u_0 = 3,\ u_1 = 6,\ u_2 = 27$;
d) $u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + 2u_{n-3}$ y $u_0 = 6,\ u_1 = 6,\ u_2 = 3$;
e) $u_n = 9u_{n-1} - 33u_{n-2} + 66u_{n-3} - 81u_{n-4} + 63u_{n-5} - 29u_{n-6} + 6u_{n-7}$ y $u_0 = -1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 7,\ u_3 = 16,\ u_4 = 47,\ u_5 = 160,\ u_6 = 541$.

13) a) Se considera la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } \boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \text{la relación } \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{X}_{n-1} \text{ en donde } \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

α) Determinar la ecuación característica, los valores propios y los vectores propios de la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ de la matriz $\boldsymbol{M}$.

β) Expresar $\boldsymbol{X}_0$ en función de $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y de $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ y deducir la expresión del término general $\boldsymbol{X}_n$ de la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$.

b) Se considera la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } \boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{la relación } \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{X}_{n-1}, \text{ en donde } \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Determinar la ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M}$ y la expresión del término general $\boldsymbol{X}_n$ de la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$.

c) Se considera la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } \boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{la relación } \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{X}_{n-1}, \text{ en donde } \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Determinar la ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M}$ y la expresión del término general $\boldsymbol{X}_n$ de la sucesión $\{\boldsymbol{X}_n\}$.

Soluciones:

1. Es útil observar que la letra u y el índice n que figuran en la relación de recurrencia (H_2'):

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2}$$

juegan solamente un papel mudo y pueden ser indiferentemente sustituidas por otra letra y otro índice, es decir que la relación (H_2') se puede escribir indiferentemente

$$\left\{\begin{array}{ll} v_n = 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2} & \text{o bien} \\ u'_k = 5\,u'_{k-1} - 6\,u'_{k-2} & \text{o bien} \\ u''_t = 5\,u''_{t-1} - 6\,u''_{t-2} & \text{o bien} \\ u_{n+1} = 5\,u_n - 6\,u_{n-1} & \text{etc.} \end{array}\right.$$

a) Dando sucesivamente a n los valores 2, 3, 4, 5 y 6 en la relación de recurrencia (H_2'): $u'_n = 5\,u'_{n-1} - 6\,u'_{n-2}$, se obtiene:

$$u'_2 = 5\,u'_1 - 6\,u'_0 = 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = -1;$$

$$u'_3 = 5\,u'_2 - 6\,u'_1 = 5(-1) - 6 \cdot 1 = -11;$$

$$u'_4 = 5\,u'_3 - 6\,u'_2 = 5(-11) - 6(-1) = -49;$$

$$u'_5 = 5\,u'_4 - 6\,u'_3 = 5(-49) - 6(-11) = -179;$$

$$u'_6 = 5\,u'_5 - 6\,u'_4 = 5(-179) - 6(-49) = -601.$$

b) Los siete primeros términos de la sucesión $\{u''_n\}$ son $u''_0 = 2$; $u''_1 = 3$:

$$u''_2 = 5\,u''_1 - 6\,u''_0 = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3;$$

$$u''_3 = 5\,u''_2 - 6\,u''_1 = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 3 = -3;$$

$$u''_4 = 5\,u''_3 - 6\,u''_2 = 5(-3) - 6 \cdot 3 = -33;$$

$$u''_5 = 5\,u''_4 - 6\,u''_3 = 5 \cdot (-33) - 6(-3) = -147;$$

$$u''_6 = 5\,u''_5 - 6\,u''_4 = 5(-147) - 6(-33) = -537.$$

c) Los siete primeros términos de la sucesión $\{v_n\}$ son $v_0 = 3$; $v_1 = 4$:

$$v_2 = 5\,v_1 - 6\,v_0 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 2 = u'_2 + u''_2;$$
$$v_3 = 5\,v_2 - 6\,v_1 = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = -14 = u'_3 + u''_3;$$
$$v_4 = 5\,v_3 - 6\,v_2 = 5(-14) - 6 \cdot 2 = -82 = u'_4 + u''_4;$$
$$v_5 = 5\,v_4 - 6\,v_3 = 5(-82) - 6(-14) = -326 = u'_5 + u''_5;$$
$$v_6 = 5\,v_5 - 6\,v_4 = 5(-326) - 6(-82) = -1\,138 = u'_6 + u''_6.$$

Demostremos por recurrencia que $v_n = u'_n + u''_n$ para todo n entero positivo. En efecto:

— esta relación es cierta para $n = 0$ y $n = 1$,

— si $\left\{ \begin{array}{l} v_{n-2} = u'_{n-2} + u''_{n-2} \\ v_{n-1} = u'_{n-1} + u''_{n-1} \end{array} \right\}$,

se tiene
$$\begin{aligned} v_n &= 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2} \\ &= 5(u'_{n-1} + u''_{n-1}) - 6(u'_{n-2} + u''_{n-2}) \\ &= (5\,u'_{n-1} - 6\,u'_{n-2}) + (5\,u''_{n-1} - 6\,u''_{n-2}) \\ &= u'_n + u''_n \end{aligned}$$

Si las sucesiones $\{u'_n\}$ y $\{u''_n\}$ son soluciones de la ecuación de recurrencia (H_2): $u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2}$, la sucesión $\{v_n\} = \{u'_n + u''_n\}$ es también solución de la ecuación (H_2).

d) Los siete primeros términos de la sucesión $\{u_n\}$ son
$$u_0 = \lambda + 2\,\mu;\quad u_1 = \lambda + 3\,\mu;$$

$$u_2 = 5\,u_1 - 6\,u_0 = 5(\lambda + 3\,\mu) - 6(\lambda + 2\,\mu) = -\lambda + 3\,\mu = \lambda u'_2 + \mu u''_2;$$

$$u_3 = 5\,u_2 - 6\,u_1 = 5(-\lambda + 3\,\mu) - 6(\lambda + 3\,\mu) = -11\,\lambda - 3\,\mu = \lambda u'_3 + \mu u''_3;$$

$$u_4 = 5\,u_3 - 6\,u_2 = 5(-11\,\lambda - 3\,\mu) - 6(-\lambda + 3\,\mu) = -49\,\lambda - 33\,\mu = \lambda u'_4 + \mu u''_4;$$

$$u_5 = 5\,u_4 - 6\,u_3 = 5(-49\,\lambda - 33\,\mu) - 6(-11\,\lambda - 3\,\mu) = -179\,\lambda - 147\,\mu = \lambda u'_5 + \mu u''_5;$$

$$u_6 = 5\,u_5 - 6\,u_4 = 5(-179\,\lambda - 147\,\mu) - 6(-49\,\lambda - 33\,\mu) = -601\,\lambda - 537\,\mu = \lambda u'_6 + \mu u''_6.$$

Demostremos por recurrencia que $u_n = \lambda u'_n + \mu u''_n$ para todo n entero positivo. En efecto:

— esta relación es cierta para $n = 0$ y $n = 1$;

— si $\begin{cases} u_{n-2} = \lambda u'_{n-2} + \mu u''_{n-2}\,; \\ u_{n-1} = \lambda u'_{n-1} + \mu u''_{n-1}\,; \end{cases}$

se tiene

$$\begin{aligned} u_n &= 5\, u_{n-1} - 6\, u_{n-2} \\ &= 5(\lambda u'_{n-1} + \mu u''_{n-1}) - 6(\lambda u'_{n-2} + \mu u''_{n-2}) \\ &= (5\, \lambda u'_{n-1} - 6\, \lambda u'_{n-2}) + (5\, \mu u''_{n-1} - 6\, \mu u''_{n-2}) \\ &= \lambda(5\, u'_{n-1} - 6\, u'_{n-2}) + \mu(5\, u''_{n-1} - 6\, u''_{n-2}) \\ &= \lambda u'_n + \mu u''_n. \end{aligned}$$

Si las sucesiones $\{u'_n\}$ y $\{u''_n\}$ son soluciones de la ecuación de recurrencia (H_2): $u_n = 5\, u_{n-1} - 6\, u_{n-2}$, la sucesión $\{u_n\} = \{\lambda u'_n + \mu u''_n\}$, en donde $\lambda \in \mathbf{R}$ y $\mu \in \mathbf{R}$, es también solución de la ecuación (H_2), es decir que toda combinación lineal $\lambda\{u'_n\} + \mu\{u''_n\}$ de soluciones de la ecuación (H_2) es también solución de la ecuación (H_2).

e) α) La aplicación

$$u = (u_0, u_1) \multimap f(u) = \{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in \mathbf{S}$$

que es:

— *sobreyectiva*, ya que toda serie $\{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots) \in \mathbf{S}$ es la imagen según f del vector $u = (u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$, el conocimiento de una sucesión $\{u_n\}$ solución de (H_2) implica la de sus valores iniciales u_0 y u_1;

— *inyectiva*, ya que si dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ de $\mathbf{S}$ son iguales, $\{u_n\} = \{v_n\}$, se tiene

$$u_n = v_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

y en particular: $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$ o sea $u = v$,

es una aplicación *biyectiva* de $\mathbf{R}^2$ sobre $\mathbf{S}$.

β) La aplicación

$$u = (u_0, u_1) \multimap f(u) = \{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in \mathbf{S}$$

es *lineal*, ya que:

— $\forall u' = (u'_0, u'_1) \in \mathbf{R}^2$ y $\forall u'' = (u''_0\ u''_1) \in \mathbf{R}^2$

$f(u' + u'') = \{u'_n + u''_n\} = \{u'_n\} + \{u''_n\} = f(u') + f(u'')$;

la sucesión $\{v_n\}$ de $\mathbf{S}$ cuyos valores iniciales son $v_0 = u'_0 + u''_0$ y $v_1 = u'_1 + u''_1$ teniendo, según c), $v_n = u'_n + u''_n$ como término general;

— $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ y $\forall u = (u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(\lambda\mu) = \{\lambda u_n\} = \lambda\{u_n\} = \lambda f(u),$$

la sucesión $\{v_n\}$ de $\mathbf{S}$ cuyos valores iniciales son $v_0 = \lambda u_0$ y $v_1 = \lambda u_1$ que tiene, según d), $v_n = \lambda u_n$ como término general.

Siendo la aplicación $u = (u_0, u_1) \multimap f(u) = \{u_n\}$ de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{S}$ biyectiva y lineal, el conjunto $\mathbf{S}$ de las sucesivas $\{u_n\}$ soluciones de la ecuación (H'_2) tiene la misma estructura algebraica que $\mathbf{R}^2$, es decir que $\mathbf{S}$ es un *espacio vectorial de dimensión dos.*

γ) Para que las series $\{r'^n\}$ y $\{r''^n\}$ pertenezcan al conjunto $\mathbf{S}$ es necesario y suficiente que su término general verifique la ecuación (H'_2). Sustituyendo r^n por u_n en la ecuación (H'_2) se obtiene

$$r^n = 5\,r^{n-1} - 6\,r^{n-2}$$

o sea, después de dividir por r^{n-2},

$$r^2 - 5\,r + 6 = 0.$$

El trinomio de segundo grado $r^2 - 5\,r + 6 = 0$ que tiene por discriminante:

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

tiene las dos raíces reales distintas

$$r' = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{y} \quad r'' = \frac{5-1}{2} = 2$$

y las sucesiones $\{3^n\}$ y $\{2^n\}$ pertenecen al conjunto $\mathbf{S}$.

Los vectores $u' = (1, 3)$ y $u'' = (1, 2)$, que tienen por imagen en $\mathbf{S}$ respectivamente $\{3^n\}$ y $\{2^n\}$, son *linealmente independientes,* ya que

$$\lambda u' + \mu u'' = (0, 0) \Rightarrow \lambda(1, 3) + \mu(1, 2) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu, 3\,\lambda + 2\,\mu) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 3\,\lambda + 2\,\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0;$$

como $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión dos, los vectores $u' = (1, 3)$ y $u'' = (1, 2)$ forman una *base* de $\mathbf{R}^2$, es decir que todo vector $u = (u_0, u_1)$ de $\mathbf{R}^2$ es una combinación lineal de los vectores $u' = (1, 3)$ y $u'' = (1, 2)$. De aquí resulta que las sucesiones $\{3^n\}$ y $\{2^n\}$ son linealmente independientes y forman una base del espacio vectorial $\mathbf{S}$, es decir que toda sucesión $\{u_n\}$ que pertenezca al espacio vectorial $\mathbf{S}$ de las soluciones de (H_2) es una combinación lineal $\{u_n\} = \lambda\{3^n\} + \mu\{2^n\}$ de las soluciones particulares $\{3^n\}$ y $\{2^n\}$.

δ) La sucesión $\{u_n\}$ del espacio vectorial S, cuyos valores iniciales son $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$ es la imagen por la aplicación $u \multimap f(u)$ del vector $u = (1, 1)$. Como $u' = (1, 3)$ y $u'' = (1, 2)$ constituyen una base de $\mathbf{R}^2$, se puede escribir

$u = \lambda u' + \mu u''$, o sea $(1, 1) = \lambda(1, 3) + \mu(1, 2) = (\lambda + \mu, 3\lambda + 2\mu)$;

los coeficientes λ y μ que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu, \\ 1 = 3\lambda + 2\mu, \end{cases}$$

tienen por valor $\lambda = -1$, $\mu = 2$ y se tiene $u = -u' + 2u''$.

Siendo lineal la aplicación $u = (u_0, u_1) \multimap f(u) = \{u_n\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(u) &= f(-u' + 2u'') = f(-u') + f(2u'') = -f(u') + 2f(u'') \\ &= -\{u'_n\} + 2\{u''_n\} = -\{3^n\} + 2\{2^n\}, \end{aligned}$$

ya que las sucesiones $\{3^n\}$ y $\{2^n\}$ son las imágenes en $\mathbf{S}$ de los vectores $u' = (1, 3)$ y $u'' = (1, 2)$. De aquí resulta que el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ de $\mathbf{S}$ cuyos valores iniciales son $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$ es

$$u_n = -3^n + 2 \cdot 2^n = -3^n + 2^{n+1}$$

Al dar a n sucesivamente los valores 2, 3, 4, 5 y 6, se obtiene

$$\begin{aligned} u_2 &= -3^2 + 2^3 = -8 + 9 = 1, \\ u_3 &= -3^3 + 2^4 = -27 + 16 = -11, \\ u_4 &= -3^4 + 2^5 = -81 + 32 = -49, \\ u_5 &= -3^5 + 2^6 = -243 + 64 = -179, \\ u_6 &= -3^6 + 2^7 = -729 + 128 = -601. \end{aligned}$$

Evidentemente se encuentran los mismos resultados que en *a*), ya que se trata de la misma sucesión $\{u_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}. \end{cases}$$

Mientras que en *a*) se calculan los términos de la sucesión $\{u_n\}$ de forma sucesiva, aquí se puede calcular directamente un término cualquiera con la ayuda de la identidad $u_n = -3^n + 2^{n+1}$. Por ejemplo se calcula directamente

$$u_{10} = -3^{10} + 2^{11} = -59\,049 + 2\,048 = -57\,001,$$

mientras que en a) es preciso calcular los diez primeros términos para obtener u_{10} en función de u_8 y de u_9 mediante la identidad $u_{10} = 5u_9 - 6u_8$.

ε) Para estudiar el comportamiento de u_n cuando n se hace infinito se saca 3^n como factor y se tiene:

$$u_n = -3^n + 2^{n+1} = -3^n[1 - 2\cdot(^2/_3)^n] \approx -3^n$$

ya que $(^2/_3)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, o sea

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} -3^n.$$

2. a) Si las sucesiones $\{u'_n\}$ y $\{u''_n\}$ son soluciones de (H_2), se

$$\begin{cases} u'_n = au'_{n-1} + bu'_{n-2} & \forall n \geqslant 2, \\ u''_n = au''_{n-1} + bu''_{n-2} & \forall n \geqslant 2. \end{cases}$$

De aquí resulta que para todo entero $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} u_n = \lambda u'_n + \mu u''_n &= \lambda(au'_{n-1} + bu'_{n-2}) + \mu(au''_{n-1} + bu''_{n-2}) \\ &= a(\lambda u'_{n-1} + \mu u''_{n-1}) + b(\lambda u'_{n-2} + \mu u''_{n-2}) \\ &= au'_n + bu''_n , \quad \text{o sea} \quad u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \end{aligned}$$

es decir que la sucesión $\{u_n\} = \{\lambda u'_n + \mu u''_n\}$ es solución de (H_2).

La aplicación

$$u = (u_0, u_1) \multimap f(u) = \{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \in \mathbf{S},$$

que asocia a cada vector $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ la sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_2) cuyos primeros términos son u_0 y u_1, es *biyectiva* y *lineal*. El conjunto $\mathbf{S}$ de las sucesiones $\{u_n\}$ soluciones de (H_2) es entonces, como $\mathbf{R}^2$, un espacio vectorial de dimensión dos.

b) Ya que, para todo entero $n \geqslant 2$, $v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}$ se puede escribir

$$v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2},$$

o sea:

$$\Delta v_n = v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2} = \Delta v_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2,$$

se tiene:

$$\Delta v_n = \Delta v_{n-1} = \Delta v_{n-2} = \dots = \Delta v_1 = v_1 - v_0.$$

La sucesión $\{v_n\}$ es entonces una progresión aritmética de primer término v_0 y de razón $(v_1 - v_0)$; su término general v_n tiene por expresión

$$v_n = v_0 + n(v_1 - v_0).$$

c) La ecuación característica de la ecuación de recurrencia

$$u_n = au_{n-1} - \frac{a^2}{4}u_{n-2}$$

es $r^2 - ar + a^2/4 = 0$. Su discriminante es $\Delta = a^2 - 4 \cdot a^2/4 = 0$, que tiene dos raíces confundidas e iguales a $a/2$.

Si se sustituye para todo entero $n \geqslant 2$, u_n por $(a/2)^n v_n$, la ecuación de recurrencia anterior se escribe

$$\left(\frac{a}{2}\right)^n v_n = a\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} v_{n-1} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} v_{n-2}$$

o al dividir por $(a/2)^n$, $v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}$.

De acuerdo con *b*), $v_n = v_0 + n(v_1 - v_0)$; como $v_0 = u_0$ y $v_1 = \dfrac{2}{a} \cdot u_1$, se tiene:

$$v_n = u_0 + n\left(\frac{2}{a}u_1 - u_0\right) = u_0 + n\,\frac{2\,u_1 - au_0}{a} \quad \text{y} \quad u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n v_n,$$

o sea

$$u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n \left[u_0 + n\,\frac{2\,u_1 - au_0}{a}\right].$$

Si $-2 < a < 2$, $|a/2| < 1$ y $(a/2)^n$ tiende a cero cuando n se hace infinito; la sucesión $\{u_n\}$ converge entonces hacia cero si $-2 < a < 2$.

3. *a*) La ecuación característica de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 3\,au_{n-1} - 3\,a^2\,u_{n-2} + a^3\,u_{n-3} \qquad (H_3)$$

es

$$r^3 - 3\,ar^2 + 3\,a^2\,r - a^3 = 0 \quad \text{ó} \quad (r-a)^3 = 0;$$

que tiene tres raíces reales y confundidas $r = a$.

b) La sucesión $\{r^n\} = \{a^n\}$ es solución de la ecuación (H_3). La sucesión $\{nr^n\} = \{na^n\}$ es solución de la ecuación (H_3) ya que si $u_n = na^n$, se obtiene

$$\begin{aligned} 3\,au_{n-1} - 3\,a^2\,u_{n-2} + a^3\,u_{n-3} &= \\ &= 3\,a(n-1)\,a^{n-1} - 3\,a^2(n-2)\,a^{n-2} + a^3(n-3)\,a^{n-3} \\ &= [3(n-1) - 3(n-2) + (n-3)]\,a^n = na^n = u_n. \end{aligned}$$

Por último, la sucesión $\{n^2r^n\} = \{n^2a^n\}$ es solución de la ecuación (H_3), ya que si $u_n = n^2a^n$, se obtiene

$$\begin{aligned} 3\,au_{n-1} - 3\,a^2\,u_{n-2} + a^3\,u_{n-3} &= \\ &= 3\,a(n-1)^2\,a^{n-1} - 3\,a^2(n-2)^2\,a^{n-2} + a^3(n-3)^2\,a^{n-3} \\ &= [3(n-1)^2 - 3(n-2)^2 + (n-3)^2]\,a^n = n^2\,a^n = u_n. \end{aligned}$$

Los tres primeros términos de la sucesiones $\{a^n\}$, $\{na^n\}$ y $\{n^2a^n\}$ son respectivamente los vectores $(1, a, a^2)$, $(0, a, 2a^2)$ y $(0, a, 4a^2)$ de $\mathbf{R}^3$. Esos tres vectores son linealmente independientes, ya que

$$\lambda(1, a, a^2) + \mu(0, a, 2a^2) + \nu(0, a, 4a^2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ a(\lambda + \mu + \nu) = 0 \\ a^2(\lambda + 2\mu + 4\nu) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0;$$

de aquí resulta que las tres sucesiones $\{a^n\}$, $\{na^n\}$ y $\{n^2a^n\}$ son linealmente independientes.

c) La aplicación

$$u = (u_0, u_1, u_2) \multimap f(u) = \{u_n\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in \mathbf{S},$$

que asocia a cada vector (u_0, u_1, u_2) de $\mathbf{R}^3$ la sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_3), cuyos primeros términos son u_0, u_1 y u_2, es *biyectiva* y *lineal*. El conjunto $\mathbf{S}$ de las sucesiones u_n soluciones de (H_3) es entonces, como $\mathbf{R}^3$ un espacio vectorial de dimensión tres y toda sucesión $\{u_n\}$ de $\mathbf{S}$ es una combinación lineal $\lambda\{a^n\} + \mu\{na^n\} + \nu\{n^2a_n\}$ de las tres sucesiones linealmente independientes $\{a^n\}$, $\{na^n\}$ y $\{n^2a^n\}$.

La sucesión $\{u_n\}$ de S cuyos tres primeros términos son $u_0 = 1$, $u_1 = 2a$ y $u_2 = 7a^2$ es la imagen según f del vector $u = (1, 2a, 7a^2)$ de $\mathbf{R}^3$. Como los vectores $u' = (1, a, a^2)$, $u'' = (0, a, 2a^2)$ y $u''' = (0, a, 4a^2)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$, se tiene

$$(1, 2a, 7a^2) = \lambda(1, a, a^2) + \mu(0, a, 2a^2) + \nu(0, a, 4a^2);$$

los coeficientes λ, μ y ν que son soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda \\ 2a = a(\lambda + \mu + \nu) \\ 7a^2 = a^2(\lambda + 2\mu + 4\nu) \end{array} \right.$$

tienen por valor $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = 2$ y $u = u' - u'' + 2u'''$. Siendo lineal la función

$$u = (u_0, u_1, u_2) \multimap f(u) = \{u_n\}$$

se tiene

$$\begin{aligned} f(u) = f(u' - u'' + 2u''') &= f(u') - f(u'') + 2f(u''') \\ &= \{a^n\} - \{na^n\} + 2\{n^2a^n\}, \end{aligned}$$

o sea

$$\{u_n\} = \{a^n(1 - n + 2n^2)\}.$$

De aquí resulta que $u_7 = (1 - 7 + 98)\,a^7 = 92\,a^7$ y

$$u_{10} = (1 - 10 + 200)\,a^{10} = 191\,a^{10}.$$

La sucesión $\{u_n\}$ converge hacia 0 si $-1 < a < 1$, ya que entonces a^n y $n^k a^n$ tienden a cero cuando n se hace infinito.

4. a) Dando a n sucesivamente los valores 1, 2, 3 y 4 en la relación $u_n = 2\,u_{n-1}$, se obtiene:

$$u_1 = 2 \cdot u_0 = 2 \cdot 5 = 10;$$
$$u_2 = 2 \cdot u_1 = 2 \cdot 10 = 20;$$
$$u_3 = 2 \cdot u_2 = 2 \cdot 20 = 40:$$
$$u_4 = 2 \cdot u_3 = 2 \cdot 40 = 80.$$

Como $u_n = 2^n u_0 = 2^n \cdot 5$, u_n se hace infinito con n.

b) Dando a n sucesivamente los valores 1, 2, 3 y 4 en la relación $u_n = u_{n-1}/3$, se obtiene:

$$u_1 = \frac{u_0}{3} = \frac{1}{3};$$

$$u_2 = \frac{u_1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$u_3 = \frac{u_2}{3} = \frac{1}{27};$$

$$u_4 = \frac{u_3}{3} = \frac{1}{81}.$$

Como $u_n = 1/3^n$, la sucesión $\{u_n\}$ converge hacia cero cuando n se hace infinito.

c) Dando a n sucesivamente los valores 1, 2, 3, ..., n en la relación $u_n - u_{n-1} = n$, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 &- u_0 = 1 \\ u_2 &- u_1 = 2 \\ &\vdots \\ u_{n-1} &- u_{n-2} = n - 1 \\ u_n &- u_{n-1} = n \end{aligned}$$

o sea, sumando:

$$u_n - u_0 = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como $u_0 = 0$, el término general de la sucesión $\{u_n\}$ es $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

[El lector puede comprobar este resultado aplicando la fórmula (II.A.3₂)].

5. *a*) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = a \in \mathbf{R}^+, \\ \text{la relación } u_n = 2\, u_{n-1}, \end{cases}$$

que tiene por término general $u_n = 2^n \cdot a$, es *creciente* y aumenta indefinidamente con n (fig. 16).

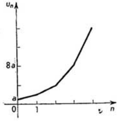


FIG. 16

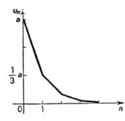


FIG. 17

b) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = a \in \mathbf{R}^+, \\ \text{la relación } u_n = {}^1\!/_3\, u_{n-1}, \end{cases}$$

que tiene por término general $u_n = \dfrac{1}{3^n}a$, es decreciente y converge hacia 0 (fig. 17).

c) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = a \in \mathbf{R}^+, \\ \text{la relación } u_n = -u_{n-1}, \end{cases}$$

tiene por término general $u_n = (-1)^n a$; es oscilante, ya que dos términos sucesivos tienen signos contrarios. Como $|u_n| = a$ para todo entero n, las oscilaciones son «regulares» (fig. 18).

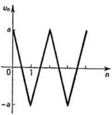


FIG. 18

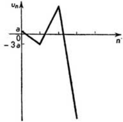


FIG. 18 bis

d) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = a \in \mathbf{R}^+, \\ \text{la relación } u_n = -3\,u_{n-1}, \end{cases}$$

que tiene por término general $(-3)^n \cdot a$, es oscilante; sus oscilaciones son «irregulares» o «amplificadas» (fig. 18 bis).

e) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = a \in \mathbf{R}^+, \\ \text{la relación } u_n = -{}^1/_2\, u_{n-1}, \end{cases}$$

que tiene por término general $u_n = (-\frac{1}{2})^n\, a$, es oscilante; sus oscilaciones son «amortiguadas» (fig. 19).

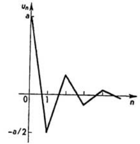


FIG. 19

6. *a*) La ecuación característica de la ecuación de recurrencia

$$u_n = \frac{5}{2}\, u_{n-1} + \frac{3}{2}\, u_{n-2}$$

es $r^2 - \frac{5}{2}\, r - \frac{3}{2} = 0$. Al ser positivo su discriminante

$$\Delta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

la ecuación tiene dos raíces

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\dfrac{5}{2} - \dfrac{7}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}, \\[2ex] r_2 = \dfrac{\dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2}}{2} = 3. \end{cases}$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ tiene entonces por expresión [ver pág. 63]

$$u_n = A_1(-\tfrac{1}{2})^n + A_2\, 3^n,$$

en donde

$$A_1 = \frac{r_2\, u_0 - u_1}{r_2 - r_1} = \frac{3\, u_0 - u_1}{7/2} = \frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7}$$

y
$$A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{u_1 - (-\frac{1}{2})\, u_0}{7/2} = \frac{2\, u_1 + u_0}{7}.$$
o sea
$$u_n = \frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2\, u_1 + u_0}{7} \cdot 3^n.$$

b) Si $u_0 \neq -2\, u_1$, $\dfrac{2\, u_1 + u_0}{7} \neq 0$ y se puede escribir
$$u_n = 3^n \left[\frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2\, u_1 + u_0}{7} \right];$$
cuando n se hace infinito, $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ tiende a cero y $u_n \approx \dfrac{2\, u_1 + u_0}{7}\, 3^n$.

La sucesión $\{u_n\}$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, según que $\dfrac{2\, u_1 + u_0}{7}$ sea positivo o negativo.

Si $u_0 = -2\, u_1$,
$$\frac{2\, u_1 + u_0}{7} = 0 \quad \text{y} \quad u_n = \frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \; ;$$
cuando n se hace infinito, la sucesión $\{u_n\}$ converge, oscilando, hacia cero.

α) Cuando $u_0 = 4$ y $u_1 = 5$,
$$\frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{2\, u_1 + u_0}{7} = 2,$$
ya se tiene $u_n = 2\,(-\frac{1}{2})^n + 2 \cdot 3^n$; cuando n se hace infinito, $u_n \approx 2 \cdot 3^n$. De aquí se deduce que

$u_{10} \approx 2 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 59\,049 = 118\,098$;

$u_{15} \approx 2 \cdot 3^{15} = 243 \cdot u_{10} \approx 28{,}7 \cdot 10^6$ ó 28,7 millones;

$u_{20} \approx 2 \cdot 3^{20} = 2 \cdot (3^{10})^2 \approx 2 \cdot (6 \cdot 10^4)^2 = 72 \cdot 10^8$ ó 7,2 miles de millones;

$u_{30} \approx 2 \cdot 3^{30} = 2 \cdot (3^{10})^3 \approx 2 \cdot (6 \cdot 10^4)^3 = 432 \cdot 10^{12}$ ó 432000 miles de millones;

$u_{50} \approx 2 \cdot 3^{50} = 2 \cdot (3^{10})^5 \approx 2 \cdot (6 \cdot 10^4)^5 = 15\,552 \cdot 10^{20}$, ¡cifra que se deja al lector que la enuncie!

β) Cuando $u_0 = 2$ y $u_1 = -1$,
$$\frac{2(3\, u_0 - u_1)}{7} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{2\, u_1 + u_0}{7} = 0,$$
y se tiene
$$u_n = 2 \cdot (-\tfrac{1}{2})^n.$$

De aquí resulta que

$$u_{10} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{512};$$

$$u_{15} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{-1}{16\,384};$$

$$u_{20} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{20} \approx \frac{2}{10^6};$$

$$u_{30} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{30} \approx \frac{2}{10^9};$$

$$u_{50} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{50} \approx \frac{2}{10^{15}}.$$

c) Cuando $u_0 = 1$ y $u_1 = 3$,

$$\frac{2(3\,u_0 - u_1)}{7} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{2\,u_1 + u_0}{7} = 1,$$

y se tiene $u_n = 3^n$ que es el término general de la progresión geométrica de primer término 1 y de razón 3.
Cuando $u_0 = 1$ y $u_1 = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{2(3\,u_0 - u_1)}{7} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{2\,u_1 + u_0}{7} = 0,$$

y se tiene $u_n = (-\frac{1}{2})^n$ que es el término general de la progresión geométrica de primer término 1 y de razón $(-\frac{1}{2})$.

Estos resultados eran previsibles, ya que 3 y $(-\frac{1}{2})$ son raíces de la ecuación característica.

7. a) Dando sucesivamente a n los valores 2, 3, 4, 5 y 6 en la relación de recurrencia: $u_n = 6\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_2 &= 6\,u_1 - 9\,u_0 = 6 \cdot 3 - 9 \cdot 2 = 0;\\
u_3 &= 6\,u_2 - 9\,u_1 = 6 \cdot 0 - 9 \cdot 3 = -27;\\
u_4 &= 6\,u_3 - 9\,u_2 = 6 \cdot (-27) - 9 \cdot 0 = -162;\\
u_5 &= 6\,u_4 - 9\,u_3 = 6 \cdot (-162) - 9\,(-27) = -729;\\
u_6 &= 6\,u_5 - 9\,u_4 = 6 \cdot (-729) - 9\,(-162) = -2\,916.
\end{aligned}$$

b) La ecuación característica de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 6\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2}$$

es $r^2 - 6r + 9 = 0$. Siendo nulo su discriminante (reducido) $\Delta' = 9 - 9 = 0$, esta ecuación tiene una raíz doble $r = 6/2 = 3$. El término general de la sucesión $\{u_n\}$ tiene entonces por expresión [ver pág. 64]

$$u_n = (A_1 + A_2 n)\, 3^n$$

donde $A_1 = u_0 = 2$ y $A_2 = \dfrac{u_1 - 2u_0}{u_0} = \dfrac{3 - 3 \cdot 2}{3} = -1$, o sea

$$u_n = (2 - n)\, 3^n.$$

De aquí resulta que

$$\begin{aligned} u_2 &= (2-2)\,3^2 = 0; \\ u_3 &= (2-3)\,3^3 = -27; \\ u_4 &= (2-4)\,3^4 = -162; \\ u_5 &= (2-5)\,3^5 = -729; \\ u_6 &= (2-6)\,3^6 = -2\,916. \end{aligned}$$

c) Cuando n tiende a infinito, el término general de la sucesión $\{u_n\}$ tiende hacia el infinito negativo.

8. *a*) Dando sucesivamente a n los valores 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - u_0 = 3 - 4 = -1; \\ u_3 &= u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4; \\ u_4 &= u_3 - u_2 = -4 - (-1) = -3; \\ u_5 &= u_4 - u_3 = -3 - (-4) = 1; \\ u_6 &= u_5 - u_4 = 1 - (-3) = 4 = u_0; \\ u_7 &= u_6 - u_5 = 4 - 1 = 3 = u_1. \end{aligned}$$

Ya que $u_6 = u_0$ y $u_7 = u_1$, $u_8 = u_7 - u_6 = u_1 - u_0 = u_2$ y de una manera general $u_n = u_{n+6} = u_{n+12} = \ldots = u_{n+6p}$, es decir la sucesión $\{u_n\}$ es periódica y tiene por período 6.

b) La ecuación característica de la ecuación de recurrencia.

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$$

es $r^2 - r + 1 = 0$. Siendo negativo su discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3\,\mathrm{i}^2$, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\left\{ \begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \\ \bar{r}_1 &= \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \right.$$

de módulo $|r_1| = \sqrt{{}^1/_4 + {}^3/_4} = 1$ y de argumentos θ y $-\theta$, estando definido θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = {}^1/_2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases}, \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/3.$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ tiene entonces por expresión [ver pág. 65]

$$u_n = A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

en donde

$$A_1 = u_0 = 4$$

$$A_2 = \frac{2\,u_1 - au_0}{\sqrt{-a^2 - 4\,b}} = \frac{6 - 4}{\sqrt{-1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

o sea

$$u_n = 4\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}.$$

Se vuelve a encontrar el resultado de *a*), a saber que $\{u_n\}$ es una sucesión periódica de período $2\pi : \dfrac{\pi}{3} = 6$, ya que el coseno y el seno son dos funciones periódicas de período 2π [ver fig. 20].

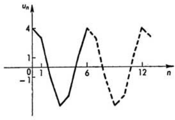


FIG. 20

Observación. — Si p es impar,

$$u_{n+3p} = 4\cos(n + 3\,p)\frac{\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}(n + 3\,p)\frac{\pi}{3}$$

$$= 4\cos\left(\frac{n\pi}{3} + p\pi\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3} + p\right)$$

$$= -4\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \quad = -u_n,$$

es decir que un término cualquiera de la sucesión es igual a uno de los seis números $u_0 = 4$, $u_1 = 3$, $u_2 = -1$, $-u_0 = -4$, $-u_1 = -3$ y $-u_2 = 1$. Así como $197 = 6 \cdot 32 + 3 + 2$,

$$u_{197} = u_{6 \cdot 32 + 3 + 2} = u_{3+2} = -u_2 = 1.$$

9. La ecuación característica de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 2\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2}$$

es $r^2 - 2r + 4 = 0$. Siendo negativo su discriminante (reducido) $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3\,\mathrm{i}^2$ la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$\begin{cases} r_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \\ \overline{r_1} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \end{cases}$$

de módulo $|r_1| = \sqrt{1+3} = 2$ y de argumentos θ y $-\theta$, θ estando definido por

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases}, \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/3.$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ tiene entonces por expresión [ver pág. 65]:

$$u_n = 2^n \left[A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \right]$$

en donde

$$A_1 = u_0 = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{2\,u_1 - a u_0}{\sqrt{-a^2 - 4\,b}} = \frac{4-2}{\sqrt{-4+16}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

o sea

$$u_n = 2^n \left[\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \right].$$

De aquí resulta que

$$u_2 = 2^2 \left[\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \right] = 4 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0;$$

$$u_3 = 2^3 \left[\cos\pi + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\pi \right] = 8[-1] = -8;$$

$$u_4 = 2^4 \left[\cos\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \right] = 16 \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = -16;$$

$$u_5 = 2^5 \left[\cos\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} \right] = 32 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0.$$

La sucesión $\{u_n\}$ es *expocíclica,* pues su término general u_n es el producto de la exponencial 2^n por la función periódica (o cíclica)

$$f(n) = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}.$$

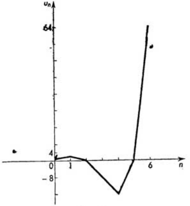


FIG. 21

Al ser el período de la función $f(n)$ $2\pi : \dfrac{\pi}{3} = 6$, se tiene $f(n + 6p) = f(n)$ para todo entero n y para todo entero p y por consiguiente

$$u_{n+6p} = 2^{n+6p}\cdot f(n + 6p) = 2^{n+6p} f(n) = 2^{6p}\cdot 2^n f(n) = 2^{6p} u_n.$$

10. *a*) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 4, \\ \text{la relación } u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^2 - 4r + 3 = 0$. Como su discriminante (reducido) $\Delta' = 4 - 3 = 1$ es positivo, esta ecuación tiene dos raíces

$$\begin{cases} r_1 = 2 - 1 = 1, \\ r_2 = 2 + 1 = 3. \end{cases}$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = A_1 + A_2\, 3^n,$$

en donde:

$$A_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} = \frac{3-4}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

y

$$A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2};$$

o sea:

$$u_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 3^n$$

La crónica $\{u_n\}$ es *creciente* y su término general aumenta indefinidamente (fig. 22).

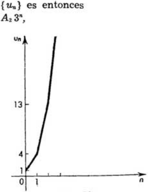


FIG. 22

b) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 3 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación } u_n = \dfrac{5}{6} u_{n-1} - \dfrac{1}{6} u_{n-2}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica

$$6r^2 - 5r + 1 = 0.$$

Como su discriminante $\Delta = 25 - 4\cdot 6 = 1$ es positivo, esta ecuación tiene dos raíces

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{5-1}{12} = \dfrac{1}{3}, \\ r_2 = \dfrac{5+1}{12} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

en donde:

$$A_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} = \frac{3/2 - 2}{1/6} = -3 \text{ y } A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{2-1}{1/6} = 6,$$

o sea:

$$u_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La crónica $\{u_n\}$ es *decreciente* y converge hacia cero (fig. 23).

c) La crónica lineal recurrente definida por

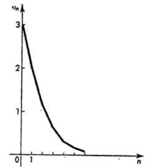


FIG. 23

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 6 \\ \quad \text{y } u_1 = 1, \\ \text{la relación } u_n = -\dfrac{1}{6}u_{n-1} + \dfrac{1}{6}u_{n-2}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica

$$6r^2 + r - 1 = 0.$$

Como su discriminante

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25$$

es positivo, esta ecuación tiene dos raíces

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-1-5}{12} = -\dfrac{1}{2}, \\ r_2 = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = A_1(-{}^1/_2)^n + A_2({}^1/_3)^n,$$

en donde

$$A_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} = \frac{2-1}{{}^5/_6} = \frac{6}{5} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{1+3}{{}^5/_6} = \frac{24}{5},$$

o sea:

$$u_n = {}^6/_5(-{}^1/_2)^n + {}^{24}/_5({}^1/_3)^n$$

Cuando n es bastante grande, $u_n \approx {}^6/_5(-{}^1/_2)^n$ y la crónica $\{u_n\}$ es oscilante, sus oscilaciones son «amortiguadas» (fig. 24).

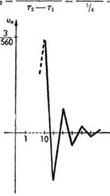


FIG. 24

d) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 5 \\ \quad \text{y } u_1 = 1, \\ \text{la relación } u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^2 + 2r - 3 = 0$. Como su discriminante (reducido) $\Delta' = 1 + 3 = 4$ es positivo, esta ecuación tiene dos raíces

$$\begin{cases} r_1 = -1 - 2 = -3, \\ r_2 = -1 + 2 = 1. \end{cases}$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es, pues:

$$u_n = A_2(-3)^n + A_2,$$

en donde:

$$A_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} = \frac{5-1}{4} = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{1+15}{4} = 4,$$

o sea:

$$u_n = (-3)^n + 4.$$

Cuando n es bastante grande, $u_n \approx (-3)^n$ y la crónica $\{u_n\}$ es oscilante; como sus oscilaciones son «amplificadas», se dice que la crónica $\{u_n\}$ es explosiva (fig. 25).

e) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 2 \\ \quad \text{y } u_1 = 3 + \sqrt{3}, \\ \text{la relación } u_n = u_{n-1}\sqrt{3} - u_{n-2}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica

$$r^2 - r\sqrt{3} + 1 = 0.$$

Como su discriminante

$$\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$$

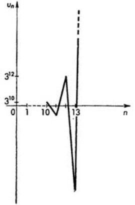


FIG. 25

es negativo, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} \qquad \overline{r_1} = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} \\ \text{de módulo } |r_1| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1, \text{ y de argumento } \theta \end{cases}$$

y $-\theta$, estando definido θ por $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, o sea $\theta = \pi/6$.

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es pues

$$u_n = A_1 \cos\frac{n\pi}{6} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6},$$

en donde:

$$A_1 = u_0 = 2 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{2u_1 - au_0}{\sqrt{-a^2-4b}} = 6,$$

o sea

$$u_n = 2\cos\frac{n\pi}{6} + 6\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}.$$

La crónica periódica $\{u_n\}$ tiene por período $2\pi : \frac{\pi}{6} = 12$; es oscilante y sus oscilaciones son «regulares» (fig. 26).

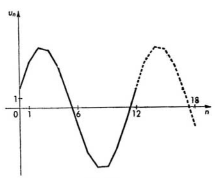


FIG. 26

f) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = \sqrt{2}, \\ \text{la relación } u_n = u_{n-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4}u_{n-2} \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{1}{4} = 0$. Como su discriminante $\Delta = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2} = \frac{i^2}{2}$ es negativo, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{4} \\ \bar{r}_1 = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4} \end{cases}, \quad \text{de módulo} \quad |r_1| = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

y de argumentos θ y $-\theta$, estando definida θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/4.$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[A_1 \cos\frac{n\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right],$$

de donde:

$$A_1 = u_0 = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{2u_1 - au_0}{\sqrt{-a^2 - 4b}} = 3$$

o sea

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\cos\frac{n\pi}{4} + 3\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right]$$

La crónica *expocíclica* $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son «amortiguadas». Obsérvese que $u_n = (\frac{1}{2})^n f(n)$, en donde f es una función periódica de n, siendo el período $2\pi : \frac{\pi}{4} = 8$ (fig. 27).

g) La crónica lineal recurrente definida por

$$\begin{cases} \text{sus dos primeros términos} \\ \quad u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación} \\ \qquad u_n = 3u_{n-1} - 9u_{n-2}, \end{cases}$$

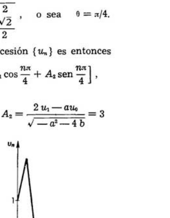


FIG. 27

tiene por ecuación característica $r^2 - 3r + 9 = 0$. Como su discriminante $\Delta = 9 - 4 \cdot 9 = -27 = 27\,i^2$ es negativo, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{3 + 3i\sqrt{3}}{2} \\ \overline{r}_1 = \dfrac{3 - 3i\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \text{de módulo} \quad |r_1| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3,$$

y de argumentos θ y $-\theta$, estando definido θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/3.$$

El término general de la sucesión $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = 3^n \left[A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right]$$

en donde

$$A_1 = u_0 = 1 \quad y \quad A_2 = \frac{2\,u_1 - a u_0}{\sqrt{-a^2 - 4\,b}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

o sea

$$u_n = 3^n \left[\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right].$$

La crónica *expocíclica* $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son «amplificadas». Obsérvese que $u_n = 3^n \cdot f(n)$ en donde f es una función periódica de n, siendo el período $2\pi : \dfrac{\pi}{3} = 6$ (fig. 28).

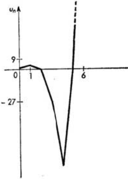


FIG. 28

11. *a*) La ecuación de segundo grado que tiene por raíces $r_1 = 3$ y $r_2 = 5$ se escribe $(r - 3)(r - 5) = 0$ o bien $r^2 - 8r + 15 = 0$; la ecuación lineal de recurrencia, que tiene por soluciones las $\{u_n\}$ de término general

$$u_n = A_1\, 3^n + A_2\, 5^n$$

tiene por ecuación característica $r^2 - 8\,r + 15 = 0$ y se escribe

$$u_n = 8\, u_{n-1} - 15\, u_{n-2}.$$

La sucesión de término general $u_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} 5^n$ tiene por primeros términos $u_0 = \frac{3}{2} 3^0 - \frac{1}{2} 5^0 = 1$ y $u_1 = \frac{3}{2} 3 - \frac{1}{2} 5 = 2.$

b) La ecuación de segundo grado que tiene una raíz doble $r = 5$ se escribe $(r - 5)^2 = 0$ o bien $r^2 - 10\,r + 25 = 0$; la ecuación lineal de recurrencia que tiene por soluciones la sucesión $\{u_n\}$ de término general $u_n = (A_1 + A_2\, n)\, 5^n$ tiene por ecuación característica $r^2 - 10\,r + 25 = 0$ y se escribe

$$u_n = 10\, u_{n-1} - 25\, u_{n-2}.$$

La sucesión de término general $u_n = (2 - 3\,n)\, 5^n$ tiene por primeros términos $u_0 = 2 \cdot 5^0 = 2$ y $u_1 = (2 - 3)\, 5 = -5.$

c) La ecuación de segundo grado que tiene por raíces $e^{i\pi/4}$ y $e^{-i\pi/4}$ cuya suma es $e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4} = 2 \cos \pi/4 = \sqrt{2}$ es el producto $e^{i\pi/4} \cdot e^{-i\pi/4} = 1$ se escribe $r^2 - r\sqrt{2} + 1 = 0$; la ecuación lineal de recurrencia que tiene por soluciones las sucesiones $\{u_n\}$ de término general

$$u_n = A_1 \cos \frac{n\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

tiene por ecuación característica $r^2 - r\sqrt{2} + 1 = 0$ y se escribe

$$u_n = u_{n-1} \sqrt{2} - u_{n-2}.$$

La sucesión de término general

$$u_n = 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

tiene por primeros términos

$$u_0 = 2 \cos 0 - \operatorname{sen} 0 = 2 \quad \text{y} \quad u_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}:$$

d) La ecuación de segundo grado que tiene por raíces $3\, e^{i\pi/6}$ y $3\, e^{-i\pi/6}$ cuya suma es $3\, e^{i\pi/6} + 3\, e^{-i\pi/6} = 6 \cos \pi/6 = 3\sqrt{3}$ y el producto

$$3\, e^{i\pi/6} \cdot 3\, e^{-i\pi/6} = 9,$$

se escribe $r^2 - 3\sqrt{3}\,r + 9 = 0$, la ecuación lineal de recurrencia que tiene por soluciones las sucesiones $\{u_n\}$ de término general

$$u_n = 3^n \left[A_1 \cos \frac{n\pi}{6} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \right]$$

tiene por ecuación característica $r^2 - 3\sqrt{3}\,r + 9 = 0$ y se escribe
$$u_n = 3\sqrt{3}\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2}.$$

La sucesión de término general
$$u_n = 3^n \left[\cos\frac{n\pi}{6} + 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right]$$

tiene por primeros términos
$$u_0 = 3^0\,[\cos 0 + 2\operatorname{sen} 0] = 1$$

y
$$u_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right] = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3.$$

12. *a*) La crónica lineal $\{u_n\}$ definida por
$$\begin{cases} \text{sus tres primeros términos } u_0 = 6,\ u_1 = 11 \text{ y } u_2 = 23, \\ \text{la relación } u_n = 6\,u_{n-1} - 11\,u_{n-2} + 6\,u_{n-3}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^3 - 6\,r^2 + 11\,r - 6 = 0$. Esta ecuación tiene tres raíces reales $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. El término general de la crónica $\{u_n\}$ es entonces
$$u_n = A_1 + A_2 \cdot 2^n + A_3 \cdot 3^n,$$
en donde A_1, A_2 y A_3, que son soluciones del sistema
$$\begin{cases} 6 = u_0 = A_1 + A_2 + A_3, \\ 11 = u_1 = A_1 + 2\,A_2 + 3\,A_3, \\ 23 = u_2 = A_1 + 4\,A_2 + 9\,A_3, \end{cases}$$

tienen por valor $A_1 = 2$, $A_2 = 3$ y $A_3 = 1$, o sea
$$u_n = 2 + 3 \cdot 2^n + 3^n.$$

b) La crónica lineal $\{u_n\}$ definida por
$$\begin{cases} \text{sus tres primeros términos } u_0 = 1,\ u_1 = 10 \text{ y } u_2 = 38, \\ \text{la relación } u_n = 7\,u_{n-1} - 16\,u_{n-2} + 12\,u_{n-3}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^3 - 7\,r^2 + 16\,r - 12 = 0$. Esta ecuación tiene por raíces $r_1 = r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. El término general de la crónica $\{u_n\}$ es entonces:
$$u_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n + A_3\,3^n,$$
en donde A_1, A_2 y A_3, que son soluciones del sistema
$$\begin{cases} 1 = u_0 = A_1 \qquad\quad + A_3, \\ 10 = u_1 = 2\,A_1 + 2\,A_2 + 3\,A_3, \\ 38 = u_n = 4\,A_1 + 8\,A_2 + 9\,A_3, \end{cases}$$

tienen por valor $A_1 = -1$, $A_2 = 3$ y $A_3 = 2$, o sea

$$u_n = (-1 + 3n)\,2^n + 2 \cdot 3^n.$$

c) La crónica lineal $\{u_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{la relación } u_n = 9\,u_{n-1} - 27\,u_{n-2} + 27\,u_{n-3}, \\ \text{sus tres primeros términos } u_0 = 3,\ u_1 = 6 \text{ y } u_2 = 27, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0$ ó $(r-3)^3 = 0$. Esta ecuación tiene una raíz triple $r_1 = r_2 = r_3 = 3$. El término general de la crónica $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = (A_1 + A_2\,n + A_3\,n^2)\,3^n,$$

en donde A_1, A_2 y A_3, que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3 = u_0 = A_1, \\ 6 = u_1 = 3\,A_1 + 3\,A_2 + 3\,A_3, \\ 27 = u_2 = 9\,A_1 + 18\,A_2 + 36\,A_3, \end{cases}$$

tienen por valor $A_1 = 3$, $A_2 = -2$ y $A_3 = 1$, es decir

$$u_n = (3 - 2\,n + n^2)\,3^n.$$

d) La crónica lineal $\{u_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus tres primeros términos } u_0 = 6,\ u_1 = 6,\ u_2 = 3, \\ \text{la relación } u_n = 3\,u_{n-1} - 3\,u_{n-2} + 2\,u_{n-3}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica $r^3 - 3r^2 + 3r - 2 = 0$ ó

$$(r-2)(r^2 - r + 1) = 0.$$

Esta ecuación tiene una raíz real $r_1 = 2$ y dos raíces complejas conjugadas

$$\begin{cases} r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \bar{r}_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ de módulo } \quad |r_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

y de argumentos θ y $-\theta$, estando definida θ por

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/3.$$

El término general de la crónica $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = A_1\,2^n + A_2 \cos\frac{n\pi}{3} + A_3 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3},$$

en donde A_1, A_2 y A_3 que son solución del sistema

$$\begin{cases} 6 = u_0 = A_1 + A_2, \\ 6 = u_1 = 2\,A_1 + \dfrac{1}{2}\,A_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_3, \\ 3 = u_2 = 4\,A_1 - \dfrac{1}{2}\,A_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_3, \end{cases}$$

tienen por valor $A_1 = 1$, $A_2 = 5$ y $A_3 = \sqrt{3}$, o sea

$$u_n = 2^n + 5\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}.$$

e) La crónica lineal $\{u_n\}$ definida por

$$\begin{cases} \text{sus siete primeros términos } u_0 = -1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 7,\ u_3 = 16, \\ \quad u_4 = 47,\ u_5 = 160,\ u_6 = 541, \\ \text{la relación } u_n = 9\,u_{n-1} - 33\,u_{n-2} + 66\,u_{n-3} - 81\,u_{n-4} + \\ \quad + 63\,u_{n-5} - 29\,u_{n-6} + 6\,u_{n-7}, \end{cases}$$

tiene por ecuación característica

$$r^7 - 9\,r^6 + 33\,r^5 - 66\,r^4 + 81\,r^3 - 63\,r^2 + 29\,r - 6 = 0,$$

o bien

$$(r-1)^3\,(r-2)\,(r-3)\,(r^2 - r + 1) = 0.$$

El término general de la crónica $\{u_n\}$ es entonces

$$u_n = A_1 + A_2\,n + A_3\,n^2 + A_4\,2^n + A_5\,3^n + A_6\cos\frac{n\pi}{3} + A_7\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3},$$

en donde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7 que son solución del sistema

$$\begin{cases} -1 = u_0 = A_1 + A_4 + A_5 + A_6, \\ 2 = u_1 = A_1 + A_2 + A_3 + 2\,A_4 + 3\,A_5 + \frac{1}{2}\,A_6 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_7, \\ 7 = u_2 = A_1 + 2\,A_2 + 4\,A_3 + 4\,A_4 + 9\,A_5 - \frac{1}{2}\,A_6 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_7, \\ 16 = u_3 = A_1 + 3\,A_2 + 9\,A_3 + 8\,A_4 + 27\,A_5 - A_6, \\ 47 = u_4 = A_1 + 4\,A_2 + 16\,A_3 + 16\,A_4 + 81\,A_5 - \frac{1}{2}\,A_6 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_7, \\ 160 = u_5 = A_1 + 5\,A_2 + 25\,A_3 + 32\,A_4 + 243\,A_5 + \frac{1}{2}\,A_6 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,A_7, \\ 541 = u_6 = A_1 + 6\,A_2 + 36\,A_3 + 64\,A_4 + 729\,A_5 + A_6, \end{cases}$$

tiene por valor $A_1 = 4$, $A_2 = -1$, $A_3 = 2$, $A_4 = -4$, $A_5 = 1$, $A_6 = -2$ y $A_7 = 2\sqrt{3}$, o sea

$$u_n = 4 - n + 2\,n^2 - 4 \cdot 2^n + 3^n - 2\cos\frac{n\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}.$$

13. *a*) α) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$r^2 - (2 + 1)\,r + 2 - 12 = 0 \quad \text{o bien} \quad r^2 - 3\,r - 10 = 0.$$

Como su discriminante $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$ es positivo, esta ecuación tiene 2 raíces reales

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{3 - 7}{2} = -2 \\ r_2 = \dfrac{3 + 7}{2} = 5 \end{cases} ;$$

$r_1 = -2$ y $r_2 = 5$ son los dos valores propios de la matriz $\boldsymbol{M}$.

La segunda componente α_1 del vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $r_1 = -2$ es la solución de la ecuación.

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\,\alpha_1 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 2 + 3\,\alpha_1 \\ 4 + \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\,\alpha_1 \end{pmatrix}$$

a saber $\alpha_1 = -{}^4/_3$.

De igual forma la segunda componente α_2 del vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ asociado con el valor propio $r_2 = 5$ es la solución de la ecuación

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5\,\alpha_2 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 2 + 3\,\alpha_2 \\ 4 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5\,\alpha_2 \end{pmatrix}$$

a saber $\alpha_2 = 1$.

β) Los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -{}^4/_3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, ya que

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -{}^4/_3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -{}^4/_3\,\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

o sea $\lambda = 0$ y $\mu = 0$; los vectores forman una base de $\mathbf{R}^2$.

El vector $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ puede escribirse $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en donde los coeficientes λ y μ que son solución del sistema

$$\begin{cases} 5 = \lambda + \mu \\ -2 = -4/3\,\lambda + \mu \end{cases}$$

tienen por valor $\lambda = 3$ y $\mu = 2$.

De las relaciones

$$\boldsymbol{M}^n\begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} = (-2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{X}_0 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resulta que

$$\mathbf{X}_n = \boldsymbol{M}^n \cdot \mathbf{X}_0 = \boldsymbol{M}^n \left[3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= 3\boldsymbol{M}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} + 2\boldsymbol{M}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix} + 2 \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o sea

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-2)^n + 2 \cdot 5^n \\ -4(-2)^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

b) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$r^2 - (4+2)\,r + 9 = 0, \quad \text{o bien} \quad r^2 - 6\,r + 9 = 0.$$

Esta ecuación tiene una raíz doble $r = 3$ que es un valor propio de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; la segunda componente α del vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ asociado a este valor propio $r = 3$ es la solución de la ecuación

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\,\alpha \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -1+2\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\,\alpha \end{pmatrix}$$

a saber $\alpha = -1$.

El término general de la sucesión $\{\mathbf{X}_n\}$ es entonces, según (III.A.2):

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right] 3^n = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] 3^n,$$

en donde

$$\lambda = \frac{(a-r)\,x_0 + by_0}{r} = \frac{(4-3)\cdot 2+1}{3} = 1,$$

o sea

$$\mathbf{X}_n = \binom{x_n}{y_n} = 3^n \binom{2+n}{1-n}.$$

c) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es

$$r^2 - (2-1)\,r + (-2+3) = 0 \quad \text{o bien} \quad r^2 - r + 1 = 0.$$

Como su discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3$ es negativo, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas, de módulo $r = \sqrt{-2+3} = 1$ y de argumentos θ y $-\theta$, siendo definido θ por

$$\left\{ \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{\sqrt{-3^2+12}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right. , \quad \text{o sea} \quad \theta = \pi/3.$$

El término general de la sucesión $\{\mathbf{X}_n\}$ es entonces según (III.A.3):

$$\mathbf{X}_n = \binom{x_n}{y_n} = r^n \left[\binom{x_0}{y_0} \cos n\theta + \binom{\lambda}{\mu} \operatorname{sen} n\theta \right] = \left[\binom{5}{2} \cos\frac{n\pi}{3} + \binom{\lambda}{\mu} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \right]$$

en donde

$$\lambda = \frac{(a - r\cos\theta)\,x_0 + by_0}{r\operatorname{sen}\theta} = \frac{(2-\frac{1}{2})\,5 - 3\cdot 2}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

y

$$\mu = \frac{cx_0 + (d - r\cos\theta)\,y_0}{r\operatorname{sen}\theta} = \frac{5 + (-1-\frac{1}{2})2}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3};$$

o sea

$$\mathbf{X}_n = \binom{x_n}{y_n} = \begin{pmatrix} 5\cos\dfrac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3} \\ 2\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA II'

1) Se considera la ecuación lineal de recurrencia de segundo orden

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}. \qquad (H_2)$$

a) Determinar las relaciones que deben verificar a y b para que el término general de la sucesión $\{u_n\}$ solución de la ecuación (H_2) sea de la forma:

α) $u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$;
β) $u_n = (A_1 + A_2 n) r^n$;
γ) $u_n = A_1 \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta$;
δ) $u_n = r^n[A_n \cos n\theta + A_2 \operatorname{sen} n\theta]$, con $r \in \mathbf{R} - \{1\}$.

b) ¿Qué relaciones deben verificar las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica de (H_2) para que las sucesiones $\{u_n\}$, soluciones de la ecuación (H_2) converjan hacia cero cualesquiera que sean los valores iniciales u_0 y u_1?

2) Determinar:

— el término general u_n,
— un valor aproximado de u_n cuando n es bastante grande,
— los valores que es preciso dar a los valores iniciales (se toma $u_0 = 1$) para que $u_n = u_1^n$ para todo entero positivo n,
— el carácter (creciente, oscilaciones, etc.)

de las sucesiones $\{u_n\}$ definidas por

a) $u_n = 7\,u_{n-1} - 10\,u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\quad u_1 = 8$;

b) $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\quad u_1 = 1$;

c) $u_n = -2\,u_{n-1} + 3\,u_{n-2}$ y $u_0 = 2,\quad u_1 = 1$;

d) $u_n = {}^7/_{12}\,u_{n-1} - {}^1/_{12}\,u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\quad u_1 = 1$;

e) $u_n = {}^3/_4\,u_{n-1} + u_{n-2}$ y $u_0 = 3,\quad u_1 = 1$;

f) $u_n = -{}^2/_{15}\,u_{n-1} + {}^1/_{15}\,u_{n-2}$ y $u_0 = 0,\quad u_1 = 1$;

g) $u_n = -{}^1/_2\,u_{n-1} + {}^1/_2\,u_{n-2}$ y $u_0 = 1,\quad u_1 = 2$;

h) $u_n = 9\,u_{n-2}$ y $u_0 = 3,\quad u_1 = 1$;

i) $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ y $u_0 = 3, \quad u_1 = 4;$

j) $u_n = {}^2/_3\, u_{n-1} - {}^1/_9\, u_{n-2}$ y $u_0 = 2, \quad u_1 = 1;$

k) $u_n = -u_{n-1} - u_{n-2}$ y $u_0 = -2, \quad u_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

l) $u_n = u_{n-1}\sqrt{3} - u_{n-2}$ y $u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

m) $u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ y $u_0 = -1, \quad u_1 = 1 + \sqrt{3};$

n) $u_n = 2u_{n-1}\sqrt{2} - 4u_{n-2}$ y $u_0 = 1, \quad u_1 = 2\sqrt{2};$

o) $u_n = -u_{n-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{9}u_{n-2}$ y $u_0 = -2, \quad u_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3};$

p) $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{4} - \dfrac{u_{n-2}}{16}$ y $u_0 = \sqrt{3}, \quad u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4};$

q) $u_n = -5u_{n-1} + 4u_{n-2} + 20u_{n-3}$ y $u_0 = 6,\ u_1 = -6,\ u_2 = 66;$

r) $u_n = -2u_{n-1} + 4u_{n-2} + 8u_{n-3}$ y $u_0 = 5,\ u_1 = 4, \quad u_2 = 12;$

s) $u_n = -3u_{n-1} - 3u_{n-2} - u_{n-3}$ y $u_0 = 4,\ u_1 = -5,\ u_2 = 12;$

t) $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 12u_{n-3}$
y $u_0 = 5, \quad u_1 = 3 - \sqrt{3}, \quad u_2 = 12 + 2\sqrt{3};$

u) $u_n = -{}^{15}/_4\, u_{n-1} + {}^{15}/_{16}\, u_{n-2} - {}^1/_4\, u_{n-3}$
y $u_0 = -2, \quad u_1 = {}^{25}/_2, \quad u_2 = -48 + {}^1/_{16};$

v) $u_n = -6u_{n-1} - u_{n-2} + 24u_{n-3} + 20u_{n-4}$
y $u_0 = 13, \quad u_1 = -5, \quad u_2 = 61, \quad u_3 = -113;$

w) $u_n = -{}^7/_4\, u_{n-1} - {}^{57}/_{16}\, u_{n-2} + {}^7/_8\, u_{n-3} - {}^1/_4\, u_{n-4}$
y $u_0 = -2,\ u_1 = {}^5/_4,\ u_2 = -10 + {}^5/_{16},\ u_3 = 16 + {}^1/_{16};$

x) $u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2} + 4u_{n-3} - 4u_{n-4}$
y $u_0 = 4, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = -2;$

y) $u_n = -u_{n-2} + 6u_{n-3} - 4u_{n-4}$
y $u_0 = 7, \quad u_1 = -2, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 41;$

z) $u_n = 8u_{n-1} - 24u_{n-2} + 32u_{n-3} - 16u_{n-4}$
y $u_0 = 5, \quad u_1 = 14, \quad u_2 = 36,\ u_3 = 136;$

α) $u_n = -2u_{n-1} - 3u_{n-2} - 2u_{n-3} - u_{n-4}$
y $u_0 = 6, \quad u_1 = -{}^5/_2,\ u_2 = -{}^1/_2,\ u_3 = -6;$

β) $u_n = -4u_{n-1} - 12u_{n-2} - 16u_{n-3} - 16u_{n-4}$
y $u_0 = 18, \quad u_1 = -30,\ u_2 = -45,\ u_3 = 288.$

3) Determinar el término general $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ de las crónicas $\{\mathbf{X}_n\}$ definidas por

a) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 \\ 5/9 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4) Determinar el término general $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ de las crónicas $\{\mathbf{X}_n\}$ definidas por

a) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Soluciones:

1. a) α) $a^2 + 4b > 0$ o bien $b > -a^2/4$;
   β) $a^2 + 4b = 0$ o bien $b = -a^2/4$;
   γ) $a^2 + 4b < 0$ y $b = -1$ o sea $b = -1$ y $-2 < a < 2$;
   δ) $a^2 + 4b < 0$ y $b = -r^2$ o sea $b = -r^2$ y $-2r < a < 2r$.

   b) Si se hace $r = \max(|r_1|, |r_2|)$, es necesario y suficiente que $r < 1$.

2. a) $u_n = -2^n + 2 \cdot 5^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 2 \cdot 5^n$; si $u_1 = 2$, $u_n = 2^n$ y si $u_1 = 5$, $u_n = 5^n$; la crónica $\{u_n\}$ es creciente.

   b) $u_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$;

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ ; si } u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ u_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\text{y si } u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ u_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n;$$

la crónica estudiada que es la *sucesión de Fibonnacci* es creciente y $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el *número de oro*.

   c) $u_n = {}^1\!/_4\,(-3)^n + {}^7\!/_4$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} {}^1\!/_4(-3)^n$; si $u_1 = -3$, $u_n = (-3)^n$ y si $u_1 = 1$, $u_n = 1$;

la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son irregulares o amplificadas.

   d) $u_n = -8({}^1\!/_4)^n + 9({}^1\!/_3)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 9({}^1\!/_3)^n$;

   si $u_1 = {}^1\!/_4$, $u_n = ({}^1\!/_4)^n$ y si $u_1 = {}^1\!/_3$, $u_n = ({}^1\!/_3)^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es decreciente y converge a cero.

   e) $u_n = 2(-{}^1\!/_2)^n + 2^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 2^n$;

   si $u_1 = -{}^1\!/_2$, $u_n = (-{}^1\!/_2)^n$ y si $u_1 = 2$, $u_n = 2^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es creciente.

   f) $u_n = -{}^{15}\!/_8\,(-{}^1\!/_3)^n + {}^{15}\!/_8\,({}^1\!/_5)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} -{}^{15}\!/_8\,(-{}^1\!/_3)^n$;

   si $u_1 = -{}^1\!/_3$, $u_n = (-{}^1\!/_3)^n$ y si $u_1 = {}^1\!/_5$, $u_n = ({}^1\!/_5)^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es oscilante cuando n es bastante grande y sus oscilaciones son amortiguadas.

g) $u_n = (-1)^{n+1} + 2\,(^1/_2)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} (-1)^{n+1}$;

si $u_1 = -1$, $u_n = (-1)^n$ y si $u_1 = {}^1/_2$, $u_n = (^1/_2)^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es oscilante cuando n es bastante grande y sus oscilaciones son regulares:

h) $u_n = {}^4/_3\,(-3)^n + {}^5/_3 \cdot 3^n$; $u_n = [5 + (-1)^n 4]\,3^{n-1}$

para todo entero positivo n; si $u_1 = -3$, $u_n = (-3)^n$ y si $u_1 = 3$, $u_n = 3^n$; la crónica $\{u_n\}$ es en diente de sierra (representar gráficamente u_n en función de n).

i) $u_n = (3 - n)\,2^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} -n\,2^n$; si $u_1 = 2$, $u_n = 2^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es decreciente.

j) $u_n = (2 + n)\,(^1/_3)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} n/3^n$; si $u_1 = {}^1/_3$, $u_n = (^1/_3)^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es decreciente y converge a cero.

k) $$u_n = -2\cos\frac{n\,2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{n\,2\pi}{3};$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica $\{u_n\}$ es periódica (o cíclica) y su período es $2\pi : \dfrac{2\pi}{3} = 3$.

l) $$u_n = \cos\frac{n\pi}{6} + 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6};$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica $\{u_n\}$ es periódica y su período es $2\pi : \dfrac{\pi}{6} = 12$.

m) $$u_n = 2^n\left[-\cos n\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{n\,2\pi}{3}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas. Obsérvese que $u_n = 2^n \cdot f(n)$, en donde f es una función periódica de n, siendo el período $2\pi : \dfrac{2\pi}{3} = 3$.

n) $$u_n = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas. El término general de esta crónica es $u_n = 2^n f(n)$, en donde f es una función periódica de n, siendo el período $2\pi : \frac{\pi}{4} = 8$.

o) $$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[-2\cos\frac{n\,5\pi}{6} + 6\,\text{sen}\,\frac{n\,5\pi}{6}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ converge hacia cero oscilando alrededor de su límite cero. El término general es $u_n = (^1/_3)^n f(n)$, en donde f es una función periódica de n, siendo el período el entero más pequeño múltiplo de $2\pi : \frac{5\pi}{6} = \frac{12}{5}$, o sea 12.

p) $$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[\sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ converge hacia cero oscilando alrededor de su límite cero. El término general es $u_n = (^1/_4)^n f(n)$ en donde f es una función periódica de n, siendo su período $2\pi : \frac{\pi}{3} = 6$.

q) $u_n = (-2)^n + 3 \cdot 2^n + 2(-5)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 2(-5)^n$; si $u_1 = -2$, y $u_2 = 4$, $u_n = (-2)^n$; si $u_1 = 2$ y $u_2 = 4$, $u_n = 2^n$, si $u_1 = (-5)$ y $u_2 = 25$, $u_n = (-5)^n$;

la crónica $\{u_n\}$ es oscilante cuando n es bastante grande y sus oscilaciones son amplificadas.

r) $u_n = 3 \cdot 2^n + (2 - n)(-2)^n$ pues la ecuación característica $r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0$ tiene una raíz simple $r_1 = 2$ y una raíz doble $r_2 = r_3 = -2$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} -n(-2)^n$; si $u_1 = 2$ y $u_2 = 4$, $u_n = 2^n$; si $u_1 = -2$ y $u_2 = 4$, $u_n = (-2)^n$; la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

s) $u_n = (4 - 2n + 3n^2)(-1)^n$ pues la ecuación característica tica

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad (r+1)^3 = 0$$

tiene una raíz triple $r_1 = r_2 = r_3 = -1$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} (-1)^n 3 n^2$; si $u_1 = -1$ y $u_2 = 1$, $u_n = (-1)^n$; la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

t) $$u_n = 2 \cdot 3^n + \left[3 \cos n\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} n\frac{2\pi}{3}\right] 2^n$$

pues la ecuación característica

$$r^3 - r^2 - 2r - 12 = 0, \quad \text{o bien} \quad (r-3)(r^2 + 2r + 4) = 0,$$

tiene una raíz real $r_1 = 3$ y dos raíces complejas conjugadas $r_2 = 2\,e^{2i\pi/3}$ y $\overline{r_2} = 2\,e^{-2i\pi/3}$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 2 \cdot 3^n$; si $u_1 = 3$ y $u_2 = 9$, $u_n = 3^n$; la crónica $\{u_n\}$ es creciente.

u) $$u_n = -3(-4)^n + \left[\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right]\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

pues la ecuación característica

$$r^3 + \frac{15}{4}r^2 - \frac{15}{16}r + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{o bien} \quad (r+4)\left(r^2 - \frac{r}{4} + \frac{1}{16}\right) = 0,$$

tiene una raíz real $r_1 = -4$ y dos raíces complejas conjugadas

$$r_2 = {}^1\!/_4\, e^{i\pi/3} \quad \text{y} \quad \overline{r_2} = {}^1\!/_4\, e^{-i\pi/3}; \; u_n \underset{n\to\infty}{\approx} -3(-4)^n;$$

si $u_1 = -4$ y $u_2 = 16$, $u_n = (-4)^n$; la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

v) $u_n = 3(-2)^n + 5 \cdot 2^n + 4(-1)^n + (-5)^n$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} (-5)^n$; si $u_1 = -2$, $u_2 = 4$ y $u_3 = -8$ se tiene $u_n = (-2)^n$; si $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ y $u_3 = 8$, se tiene $u_n = 2^n$; si $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ y $u_3 = -1$, se tiene $u_n = (-1)^n$; si $u_1 = -5$, $u_2 = 25$ y $u_3 = -125$, se tiene $u_n = (-5)^n$; la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

w) $$u_n = \left[2\cos\frac{n\,2\pi}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\,2\pi}{3}\right]2^n + \left[-4\cos\frac{n\pi}{3} + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right]\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

pues la ecuación característica

$$r^4 + \frac{7}{4}r^3 + \frac{57}{16}r^2 - \frac{7}{8}r + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{o bien} \quad (r^2 + 2r + 4)\left(r^2 - \frac{r}{4} + \frac{1}{16}\right) = 0$$

tiene por raíces

$$r_1 = 2\,e^{i2\pi/3},\quad \overline{r_1} = 2\,e^{-i2\pi/3},\quad r_2 = {}^1/_4\,e^{i\pi/3} \quad y \quad \overline{r_2} = {}^1/_4\,e^{-i\pi/3};$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} \left[2\cos\frac{n\,2\pi}{3} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\,2\pi}{3}\right] 2^n;$$

no existe solución u_n de la forma $u_1{}^n$; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ es oscilante y sus soluciones son amplificadas.

x) $u_n = 5 - 2\,n + (-1 + 3\,n)\,(-2)^n$ pues la ecuación característica

$$r^4 + 2\,r^3 - 3\,r^2 - 4\,r + 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad (r-1)^2\,(r+2)^2 = 0$$

tiene por raíces $r_1 = r_2 = 1$ y $r_3 = r_4 = -2$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 3\,n(-2)^n$; si $u_1 = u_2 = u_3 = 1$, se tiene $u_n = 1$; si $u_1 = -2$, $u_2 = 4$ y $u_3 = -8$, se tiene $u_n = (-2)^n$; la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

$$y) \qquad u_n = 3 + 2\,n + \left[4\cos n\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,n\frac{2\pi}{3}\right] 2^n$$

pues la ecuación característica

$$r^4 + r^2 - 6\,r + 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad (r^2 + 2\,r + 4)\,(r-1)^2$$

tiene por raíces $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2\,e^{i2\pi/3}$ y $\overline{r_3} = 2\,e^{-i2\pi/3}$;

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} \left[4\cos n\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,n\frac{2\pi}{3}\right] 2^n;$$

si $u_1 = u_2 = u_3 = 1$, se tiene $u_n = 1$; la crónica expocíclica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

z) $u_n = (5 + 4\,n - 3\,n^2 + n^3)\,2^n$ pues la ecuación característica

$$r^4 - 8\,r^3 + 24\,r^2 - 32\,r + 16 = 0 \quad \text{o bien} \quad (r-2)^4 = 0$$

tiene una raíz múltiple de orden cuatro, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 2$; $u_n \underset{n\to\infty}{\approx} n^3\,2^n$; si $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$ se tiene $u_n = 2^n$; la crónica $\{u_n\}$ es creciente y su término general se hace infinito con n.

$$\alpha) \qquad u_n = \left[2\cos n\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,n\frac{2\pi}{3}\right] (3 - 2\,n)$$

pues la ecuación característica

$$r^4 + 2\,r^3 + 3\,r^2 + 2\,r + 1 = 0, \quad \text{o bien} \quad (r^2 + r + 1)^2 = 0,$$

tiene dos raíces dobles complejas $r_1 = r_2 = e^{i2\pi/3}$ y $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = e^{-i2\pi/3}$;

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} 2\,n\left[-2\cos n\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{3}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

$$\beta)\quad u_n = 2^n\left(6\cos n\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{3}\right)(3+n)$$

pues la ecuación característica

$$r^4 + 4r^3 + 12r^2 + 16r + 16 = 0, \quad \text{o bien} \quad (r^2 + 2r + 4)^2 = 0,$$

tiene dos raíces dobles complejas

$$r_1 = r_2 = 2\,\mathrm{e}^{i2\pi/3} \quad \text{y} \quad \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \mathrm{e}^{--2i\pi/3};$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\approx} n\,2^n\left[6\cos n\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{3}\right];$$

no existe solución u_n de la forma u_1^n la crónica $\{u_n\}$ es oscilante y sus oscilaciones son amplificadas.

3. *a)* La matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios $r_1 = 5$ y $r_2 = 2$ a los cuales corresponden los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Como $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz M, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n \\ 5^n \end{pmatrix}.$$

b) La matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$ a los cuales corresponden los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$,

se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7^n}{4} + \dfrac{5\cdot 3^n}{4} \\ \dfrac{7^n}{4} - \dfrac{3^n}{4} \end{pmatrix}.$$

c) La matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios $r_1 = 2$ y $r_2 = 6$ a los cuales corresponden los vectores propios $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 6^n \\ \frac{1}{2}(2^n + 6^n) \end{pmatrix}.$$

d) La matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios $r_1 = 1$ y $r_2 = 14$ a los cuales corresponden los vectores propios $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{13}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{20 + 6 \cdot 14^n}{13} \\ \dfrac{-5 + 18 \cdot 14^n}{13} \end{pmatrix}.$$

e) La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios $r_1 = \sqrt{2}$ y $r_2 = -\sqrt{2}$ a los cuales corresponden los valores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} + \frac{3\sqrt{2} - 2}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n - \dfrac{3\sqrt{2} - 2}{4}(-\sqrt{2})^n \\ \dfrac{4 - \sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n + \dfrac{4 + \sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}.$$

f) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene una raíz doble $r_1 = r_2 = 2$ a la que corresponde el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-n)\,2^n \\ (1+n)\,2^n \end{pmatrix}.$$

g) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 \\ 5/9 & -1/3 \end{pmatrix}$ tiene una raíz doble $r_1 = r_2 = 1/3$ a la que corresponde el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 5/6 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{10-16\,n}{5 \cdot 3^n} \\ \dfrac{9-8\,n}{3^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

h) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ tiene dos raíces complejas conjugadas $r_1 = e^{i\pi/3}$ y $\overline{r_1} = e^{-i\pi/3}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3} \\ 4\cos\dfrac{n\pi}{3} + 3\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

i) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7/2 & -1 \end{pmatrix}$ tiene dos raíces complejas conjugadas $r_1 = 2\,e^{i\pi/3}$ y $\overline{r_1} = 2\,e^{-i\pi/3}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}\right) \\ 2^r\left(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{6}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

4. *a*) La matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ tiene tres valores propios $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ y $r_3 = 2$ a los cuales corresponden los vectores propios

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{63}\!/_2 + {}^{25}\!/_2\,(-1)^n + 20 \cdot 2^n \\ -{}^{21}\!/_2 + {}^{5}\!/_2\,(-1)^n + 10 \cdot 2^n \\ -\ 7 + 5\,(-1)^n + \ 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

b) $$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ n\,x_0 + y_0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}\,x_0 + ny_0 + z_0 \end{pmatrix}$$

[Para calcular M^n, se escribe M en la forma $M = I + J$, en donde I *es la matriz unidad*].

PROBLEMA III

1) Calcular el término general u_n y los términos u_3, u_5 y u_8 de las sucesiones de recurrencia definidas por

a) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 5, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2\,u_{n-1} + 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 4\,u_{n-1} + 4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 3/2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = -u_{n-1} + 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_{n+1} = u_n + 3. \end{cases}$

2) Calcular el término general u_n y los términos u_2 y u_5 de las sucesiones de recurrencia definidas por

a) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2\,u_{n-1} + 3^n; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 3\,u_{n-1} + 2^n; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2\,u_{n-1} + 2^n; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = -u_{n-1} + 5^n; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = -1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5\,u_{n-1} + 3 \cdot 2^n. \end{cases}$

3) Calcular el término general u_n y los términos u_3 y u_6 de las sucesiones de recurrencia definidas por

a) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 3/4, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 3\,u_{n-1} + n - 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2u_{n-1} + n^2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{el primer término } u_0 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} + n. \end{cases}$

4) Discutir cualitativamente las variaciones del término general u_n, en función de los valores de a cuando A es positivo, de la sucesión de recurrencia definida por:

$\begin{cases} \text{su primer término } u_0 = 0, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = au_{n-1} + A. \end{cases}$

5) Calcular el término general u_n y los términos u_3 y u_6 de las sucesiones de recurrencia definidas por

a) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = -5u_{n-1} + 6u_{n-2} + 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} - 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 3 \text{ y } u_1 = 5, \\ \text{la relación de recurrencia } n_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 1. \end{cases}$

6) Calcular el término general u_n y los términos u_2 y u_5 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 4 \cdot 5^n; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 3 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 5 \cdot 3^n; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 0, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + 3(-1)^n; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 3 \text{ y } u_1 = 10, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + 5 \cdot 2^2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + (-2)^n. \end{cases}$

7) Calcular el término general u_n y los términos u_3 y u_5 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 1 - n + 2n^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + n; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + 1 + n + n^2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 5, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2} + 2 + 3n; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} - 3 + 4n; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = 1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2} + 3^n + 4n; \end{cases}$

g) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 3n + 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2} + n^2 \cdot 2^n; \end{cases}$

i) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 2 \text{ y } u_1 = -1, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3 \operatorname{sen} n\pi/6; \end{cases}$

j) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 3\cos n\pi/4; \end{cases}$

k) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = 1 \text{ y } u_1 = 2, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 2\cos n\pi/3; \end{cases}$

l) $\begin{cases} \text{los dos primeros términos } u_0 = -1 \text{ y } u_1 = 3, \\ \text{la relación de recurrencia } u_n = -u_{n-1} + 6u_{n-2} + \\ \qquad\qquad + 3\cos n\pi/2 - 2\cos n\pi/3. \end{cases}$

8) Se ingresa un capital C_0 en una cuenta a interés compuesto de tasa i.

a) Sabiendo que se retira una cantidad s al final de cada año, determinar la relación que liga el estado C_n de cuenta después de la n-ésima anualidad en función del estado C_{n-1} de la cuenta después de la $(n-1)$-ésima anualidad.

b) Expresar C_n en función de C_0, s, i y n. Deducir la relación que debe ligar a C_0, i y s para que la cuenta sirva de renta perpetua.

c) En caso contrario, determinar la última anualidad en que la cuenta es acreedora. Aplicación numérica $C_0 = 1\,000$ ptas., $i = 4$ % y $s = 50$ ptas.

9) Se ingresa un capital C_0 en una cuenta a interés compuesto de tasa i.

a) Sabiendo que se retira una cantidad s al final del primer año, una cantidad $2s$ al final del segundo año, una cantidad $2^{n-1}s$ al final del año n-ésimo, determinar la relación que liga el estado C_n de la cuenta después de la n-ésima anualidad en función del estado C_{n-1} de la cuenta después de la $(n-1)$-ésima anualidad.

b) Expresar C_n en función de C_0, i, s y n; deducir la última anualidad en que la cuenta es acreedora. Aplicación numérica $C_0 = 1\,000$ ptas., $i = 4$ % y $s = 50$ ptas.

10) Si R_t, C_t, I_t y G_t designan la renta, el consumo, la inversión privada y la inversión gubernamental en el instante t, el modelo de Samuelson se describe por el esquema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} R_t = C_t + I_t + G_t & \text{(ecuación contable de equilibrio),} \\ C_t = \alpha R_{t-1} & \text{(ecuación de consumo),} \\ I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) & \text{(ecuación de inversión),} \\ G_t = 1 & \end{array}\right.$$

a) Demostrar que R_t es la solución de una ecuación de recurrencia de segundo orden que se ha de determinar.

b) Sabiendo que la propensión marginal a consumir es tal que $0 < \alpha < 1$, determinar una solución particular de la ecuación de recurrencia, determinada en a). ¿Qué ocurre si $\alpha = 1$?

c) ¿Cuál es la forma de R_t según los valores de α y β?

11) a) Leonardo de Pisa presenta entre «sus modelos económicos» la historia del mercader que va de ciudad en ciudad comprando mercancías y revendiéndolas en la etapa siguiente. Esta reventa la realiza con beneficio; para fijar las ideas, digamos que el precio de venta es doble del de compra. En cada etapa nuestro mercader doblaría su capital si no tuviera gastos; en cada etapa debe desembolsar 12 denarios.

Escribir un ejemplo numérico que muestre el desarrollo del proceso; por ejemplo:

— capital inicial ... ... 15 denarios
— duplicación ... ... 30 denarios
— después del pago de gastos ... ... 18 denarios
— etapa siguiente ... ... 36 denarios

Proseguir el cálculo y construir un gráfico.

b) Un problema propuesto por Leonardo es el siguiente: un mercader parte de Pisa para Luca en donde logra doblar su capital; paga luego sus gastos de viaje (12 denarios). Después marcha a Florencia en donde duplica su capital. Paga los gastos de viaje (12 denarios) y vuelve a Pisa en donde comienza por tercera vez la operación: duplicación de su capital y pago de los gastos. Comprueba entonces que su bolsa está vacía. ¿Cuál era su capital inicial?

c) Establecer la teoría general:

— designar el capital inicial por x_0;
— suponer que cada operación comercial multiplica el capital por $q = 1 + B$ (B es la tasa de beneficio);
— suponer los gastos constantes e iguales a c;
— calcular x_t en función de x_{t-1}
— calcular x_t en función de x_0, de q, de c y de t;
— demostrar que x_t aumenta o disminuye con el tiempo según el valor inicial x_0. Si disminuye, acaba siempre por pasar por el valor cero; demostrarlo;
— tomar como en el primer ejemplo: $c = 12$ y $q = 2$ y dibujar el gráfico que representa en función de x_0 el número máximo de etapas que puede recorrer el mercader sin empeñarse.

12) *a*) La relación $\dfrac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3} = f(n)$ define la sucesión de las $f(n)$ a partir de las de u_n por una operación llamada «de las medias móviles (de tres términos).

α) Efectuar una operación tal sobre la sucesión de los números impares

$$u = (1, 3, 5, 7, \ldots, \text{etc.}).$$

β) Sobre la de los cuadrados $u = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots, \text{etc.})$.

b) Se quieren encontrar todas las funciones u_n que tengan por función $f(n)$, la serie $f = (1, 3, 5, 7, \ldots)$, es decir $f(n) = 2n + 1$. Hallar en primer lugar una solución particular del tipo siguiente:

$$u_n = An + B.$$

c) Estudiar luego la ecuación: $v_n + v_{n-1} + v_{n-2} = 0$.

Se demostrará haciendo $v_0 = a$, $v_1 = b$ y calculando $v_2, v_3, \ldots$, ya que v_n es periódica.

d) Utilizando los teoremas generales conocidos, construir el conjunto de las funciones u_n para las cuales las medias móviles (de tres términos) llevan a $f(n) = 2n + 1$.

e) Considerar u_n como progresión geométrica. Se podrán realizar los cálculos, a título de ejemplo, entre: (1, 2, 4, 8, 16, ...). Demostrar que f es también de una progresión geométrica. Establecer que si $u_n = a^n$, se tiene $f(n) = Ca^n$. Determinar la constante C.

f) ¿Cuáles son las funciones u_n tales que $f(n) = 2^n$?

Soluciones:

1. *a*) Según (II.A.2$_1$, pág. 72), se tiene:

$$u_n = 2^n \cdot 5 + 3\frac{1-2^n}{1-2} = 2^n \cdot 5 + 3(2^n - 1) = 8 \cdot 2^n - 3 = 2^{n+3} - 3;$$

en particular:

$$u_3 = 2^6 - 3 = 61,\ u_5 = 2^8 - 3 = 253 \ \text{ y } \ u_8 = 2^{11} - 3 = 2\,045.$$

b) Según (II.A.2$_1$), se tiene:

$$u_n = 4^n + 4\frac{1-4^n}{1-4} = 4^n + \frac{4}{3}(4^n - 1) = \frac{7}{3}4^n - \frac{4}{3};$$

en particular:

$$u_3 = \frac{7}{3} \cdot 4^3 - \frac{4}{3} = 148, \quad u_5 = \frac{7}{3}4^5 - \frac{4}{3} = 2\,388$$

$$\text{y} \quad u_8 = \frac{7}{3}4^8 - \frac{4}{3} = 152\,916.$$

c) Según (II.A.2$_1$), se tiene:

$$u_n = (-1)^n\frac{3}{2} + 5\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = (-1)^n\left[\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right] + \frac{5}{2} = (-1)^{n+1} + \frac{5}{2};$$

en particular:

$$u_3 = (-1)^4 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2},\ u_5 = (-1)^6 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \text{ y } u_8 = (-1)^9 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

d) Según (II.A.2$_2$), se tiene $u_n = 2 + 3n$; en particular

$$u_3 = 2 + 3 \cdot 3 = 11, \quad u_5 = 2 + 3 \cdot 5 = 17 \quad \text{y} \quad u_8 = 2 + 3 \cdot 8 = 26.$$

2. *a*) Según (II.A.1$_1$), se tiene:

$$u_n = 2^n + 3\frac{3^n - 2^n}{3-2} = 2^n + 3(3^n - 2^n) = 3^{n+1} - 2^{n+1};$$

en particular:

$$u_2 = 3^3 - 2^3 = 19 \quad \text{y} \quad u_5 = 3^6 - 2^6 = 665.$$

b) Según (II.A.1$_1$), se tiene:

$$u_n = 3^n + 2\,\frac{2^n - 3^n}{2 - 3} = 3^n + 2(3^n - 2^n) = 3^{n+1} - 2^{n+1};$$

en particular:

$$u_2 = 3^3 - 2^3 = 19 \quad \text{y} \quad u_5 = 3^6 - 2^6 = 665.$$

c) Según (II.A.1$_2$), se tiene:

$$u_n = (3 + n)\,2^n;$$

en particular:

$$u_2 = (3 + 2)\,2^2 = 20 \quad \text{y} \quad u_5 = (3 + 5)\,2^5 = 256.$$

d) Según (II.A.1$_1$), se tiene:

$$u_n = (-1)^n + 5\,\frac{5^n - (-1)^n}{5 - (-1)} = (-1)^n\left[1 - \frac{5}{6}\right] + \frac{5}{6}\cdot 5^n = \frac{(-1)^n}{6} + \frac{5^{n+1}}{6};$$

en particular:

$$u_2 = \frac{(-1)^2}{6} + \frac{5^3}{6} = 21 \quad \text{y} \quad u_5 = \frac{(-1)^5}{6} + \frac{5^6}{6} = 2\,604.$$

e) Según (II.A.1$_1$), se tiene:

$$u_n = 5^n\,(-1) + 6\,\frac{2^n - 5^n}{2 - 5} = -5^n + 2(5^n - 2^n) = 5^n - 2^{n+1};$$

en particular:

$$u_2 = 5^2 - 2^3 = 17 \quad \text{y} \quad u_5 = 5^5 - 2^6 = 3\,061.$$

3. *a*) Según (II.A.3$_1$), se tiene

$$u_n = 3^n({}^3/_4 - Q_1(0)) + Q_1(n)$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n, solución particular de la ecuación $u_n = 3\,u_{n-1} + n - 1$. Determinemos α y β identificando los términos en n y las constantes en la ecuación

$$Q_1(n) = 3\,Q_1(n-1) + n - 1$$

obtenida sustituyendo u_n por $Q_1(n)$ en la ecuación $u_n = 3u_{n-1} + n - 1$. Se tiene $\alpha n + \beta = 3\,\alpha(n-1) + 3\,\beta + n - 1$ o bien

$$\alpha n + \beta = (3\,\alpha + 1)\,n - 3\,\alpha + 3\,\beta - 1;$$

β y α verifican el sistema $\begin{cases} \alpha = 3\,\alpha + 1 \\ \beta = -3\,\alpha + 3\,\beta - 1 \end{cases}$

que tiene por solución

$\alpha = -{}^1/_2$ y $\beta = -{}^1/_4$ de tal manera que $Q_1(n) = -{}^1/_2\, n - {}^1/_4$, $Q_1(0) = -{}^1/_4$ y

$$u_n = 3^n({}^3/_4 - (-{}^1/_4)) - {}^1/_2\, n - {}^1/_4 = 3^n - {}^1/_2\, n - {}^1/_4;$$

en particular:

$$u_3 = 3^3 - {}^3/_2 - {}^1/_4 = 101/4 \quad \text{y} \quad u_6 = 3^6 - {}^6/_2 - {}^1/_4 = 2\,903/4.$$

b) Según (II.A.3$_1$), se tiene:

$$u_n = 2^n[1 - Q_2(0)] + Q_2(n),$$

en donde $Q_2(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ es un polinomio de segundo grado en n.

Determinemos α, β y γ identificando los términos en n^2, en n y las constantes en la ecuación $Q_2(n) = 2\,Q_2(n-1) + n^2$ obtenida sustituyendo $Q_2(n)$ por u_n en la ecuación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} + n^2$.

Se tiene

$$\begin{aligned}\alpha n^2 + \beta n + \gamma &= 2[\alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \gamma] + n^2\\ &= 2[\alpha n^2 - 2\,\alpha n + \alpha + \beta n - \beta + \gamma] + n^2\\ &= (2\,\alpha + 1)\,n^2 + 2(\beta - 2\,\alpha)\,n + 2(\alpha - \beta + \gamma);\end{aligned}$$

α, β y γ verifican el sistema

$$\begin{cases}\alpha = 2\,\alpha + 1\\ \beta = 2\,\beta - 4\,\alpha\\ \gamma = 2\,\alpha - 2\,\beta + 2\,\gamma\end{cases}$$

que tiene por solución $\alpha = -1$, $\beta = -4$ y $\gamma = -6$ de tal manera que

$$Q_2(n) = -n^2 - 4\,n - 6,\ Q_2(0) = -6$$

y

$$u_n = 2^n[1 - (-6)] - n^2 - 4\,n - 6 = 7 \cdot 2^n - n^2 - 4\,n - 6;$$

en particular:

$$u_3 = 7 \cdot 2^3 - 3^2 - 4 \cdot 3 - 6 = 29$$

y

$$u_6 = 7 \cdot 2^6 - 6^2 - 4 \cdot 6 - 6 = 382.$$

c) Según (II.A.3$_2$), se tiene:

$$u_n = u_0 + nQ_1(n) = 2 + nQ_1(n),$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado. Determinemos α y β identificando los términos en n y las constantes en la ecuación

$$nQ_1(n) = (n-1)\,Q_1(n-1) + n$$

obtenida sustituyendo $nQ_1(n)$ por u_n en la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + n$. Se tiene

$$n(\alpha n + \beta) = (n-1)[\alpha(n-1) + \beta] + n = \alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + n$$

o bien

$$\alpha n^2 + \beta n = \alpha n^2 + (\beta - 2\alpha + 1)n + \alpha - \beta:$$

α y β verifican el sistema

$\begin{cases} \beta = \beta - 2\alpha + 1 \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases}$ que tiene por solución $\alpha = \beta = 1/2$ de tal manera que

$$Q_1(n) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad u_n = 2 + nQ_1(n) = 2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2};$$

en particular

$$u_3 = 2 + \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} = 8 \quad \text{y} \quad u_6 = 2 + \frac{6^6}{2} + \frac{6}{2} = 23.$$

4. Si $a \neq 1$, como $u_0 = 0$, se tiene según (II.A.2$_1$):

$$u_n = A\frac{1-a^n}{1-a} = \frac{A}{1-a}(1-a^n);$$

si $a < -1$, $\frac{A}{1-a} > 0$, $1 - a^n \to \begin{cases} -\infty \text{ si } n = 2p \\ +\infty \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$

y $u_n \to \begin{cases} -\infty \text{ si } n = 2p \\ +\infty \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$ es decir que u_n es un *proceso oscilatorio amplificado*;

si $a = -1$, $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p \\ A \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$ y u_n es un *proceso oscilatorio regular*;

si $-1 < a < 0$, $a^n \to \begin{cases} 0 \text{ para valores positivos si } n = 2p, \\ 0 \text{ para valores negativos si } n = 2p+1, \end{cases}$

$1 - a^n \to \begin{cases} 1 \text{ para valores inferiores si } n = 2p, \\ 1 \text{ para valores superiores si } n = 2p+1, \end{cases}$

y $u_n \to \begin{cases} \dfrac{A}{1-a} \text{ para valores inferiores si } n = 2p, \\ \dfrac{A}{1-a} \text{ para valores superiores si } n = 2p+1, \end{cases}$

es decir que u_n es *un proceso oscilatorio amortiguado*;

si $a = 0$, $u_n = A \quad \forall n \geqslant 1$ y u_n es constante;

si $0 < a < 1$, $a^n \to 0$ para valores positivos,
$1 - a^n \to 1$ para valores inferiores,

y $u_n = \dfrac{A}{1-a}(1-a^n)$ es decreciente hacia $\dfrac{A}{1-a}$;

si $a > 1$, u_n es creciente y tiende hacia infinito.

Si $a = 1$, se tiene, según (II.A.2$_2$): $u_n = An$ y u_n es el término general de una progresión aritmética creciente [ver tomo 2, páginas 110-118].

5. *a*) La ecuación homogénea $u_n = 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$; su solución general es entonces $v_n = A_1 2^n + A_2 3^n$. Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 5$$

es según (II.B.2$_1$):

$$u_n = A_1 2^n + A_2 3^n + \frac{5}{1-5+6} = A_1 2^n + A_2 3^n + \frac{5}{2}.$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 2^0 + A_2 3^0 + {}^5/_2 \\ u_1 = A_1 2^1 + A_2 3^1 + {}^5/_2 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} 2 = A_1 + A_2 + {}^5/_2 \\ 1 = 2\,A_1 + 3\,A_2 + {}^5/_2 \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = 0$ y $A_2 = -{}^1/_2$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ y para la relación de recurrencia $u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 5$ es

$$u_n = \frac{-3^n + 5}{2};$$

en particular:

$$u_3 = \frac{-3^3 + 5}{2} = -11 \quad \text{y} \quad u_6 = \frac{-3^6 + 5}{2} = -362.$$

b) La ecuación homogénea $v_n = -5\,v_{n-1} + 6\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 + 5r - 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = -6$ y $r_2 = 1$; su solución general es entonces $v_n = A_1(-6)^n + A_2$. Como 1 es raíz simple de la ecuación característica $r^2 + 5r - 6 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = -5\,u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 3$$

es según (II.B.2$_2$):

$$u_n = A_1(-6)^n + A_2 + \frac{3}{-5+12}\,n = A_1(-6)^n + A_2 + \frac{3}{7}\,n.$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1(-6)^0 + A_2 \\ u_1 = A_1(-6)^1 + A_2 + {}^3/_7 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 1 = -6\,A_1 + A_2 + {}^3/_7 \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = \dfrac{-4}{49}$ y $A_2 = \dfrac{4}{49}$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = -5\,u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 3$ es

$$u_n = \frac{-4(-6)^n + 4 + 21\,n}{49};$$

en particular:

$$u_3 = \frac{-4(-6)^3 + 4 + 21\cdot 3}{49} = 19$$

$$\text{y} \quad u_6 = \frac{-4(-6)^6 + 4 + 21\cdot 6}{49} = 3\,806.$$

c) La ecuación homogénea $v_n = 4\,v_{n-1} - 4\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 4\,r + 4 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 2$; su solución general es entonces $v_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n$. Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 4\,r + 4 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} - 1$$

es, según (II.B.2$_1$):

$$u_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n - \frac{1}{1-4+4} = (A_1 + A_2\,n)\,2^n - 1.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1\,2^0 \\ u_1 = (A_1 + A_2)\,2^1 - 1 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} 2 = A_1 \qquad\quad -1 \\ 1 = 2\,A_1 + 2\,A_2 - 1 \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = 3$ y $A_2 = -2$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} - 1$ es

$$u_n = (3 - 2\,n)\,2^n - 1;$$

en particular:

$$u_3 = (3 - 2 \cdot 3)\, 2^3 - 1 = -25 \quad \text{y} \quad u_6 = (3 - 2 \cdot 6)\, 2^6 - 1 = -577.$$

d) La ecuación homogénea $v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 2\,r + 1 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 1$; su solución general es entonces $v_n = A_1 + A_2\,n$. Como 1 es raíz doble de la ecuación característica $r^2 - 2\,r + 1 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} + 2$$

es, según (II.B.2$_3$):

$$u_n = A_1 + A_2\,n + {}^2\!/_2\, n^2 = A_1 + A_2\,n + n^2.$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 \\ u_1 = A_1 + A_2 + 1 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 3 = A_1 \\ 5 = A_1 + A_2 + 1 \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = 3$ y $A_2 = 1$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ y por la relación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} + 2$ es $u_n = 3 + n + n^2$; en particular $u_3 = 3 + 3 + 3^2 = 15$ y $u_6 = 3 + 6 + 6^2 = 45$.

e) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - r + 1 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = e^{i\pi/3}$ y $r_2 = \bar{r}_1 = e^{-i\pi/3}$; su solución general es pues

$$v_n = A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}.$$

Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - r + 1 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 1$ est, según (II.B.2$_1$):

$$u_n = A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{1 - 1 + 1} = A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + 1.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 \cos 0 + A_2 \operatorname{sen} 0 + 1 \\ u_1 = A_1 \cos\dfrac{\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} + 1 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 2 = A_1 \qquad\qquad + 1 \\ 3 = \dfrac{1}{2} A_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} A_2 + 1 \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = 1$ y $A_2 = \sqrt{3}$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ y por la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 1$ es

$$u_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3} + 1;$$

en particular:

$$u_3 = \cos\pi + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\pi + 1 = 0 \quad \text{y} \quad u_6 = \cos 2\pi + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,2\pi + 1 = 2.$$

6. *a)* La ecuación homogénea $v_n = 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 5\,r + 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$; su solución general es entonces $v_n = A_1\,2^n + A_2\,3^n$. Como 5 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 5\,r + 6 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 4\cdot 5^n$$

es, según (II.B.1$_1$),

$$u_n = A_1\,2^n + A_2\,3^n + \frac{4\cdot 5^2}{5^2 - 5\cdot 5 + 6}\,5^n =$$

$$= A_1\,2^n + A_2\,3^n + \frac{100}{6}\,5^n = A_1\,2^n + A_2\,3^n + \frac{2}{3}\,5^{n+2}.$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = A_1\,2^0 + A_2\,3^0 + \dfrac{2}{3}\,5^2 \\[2ex] u_1 = 2A_1 + 3\,A_2 + \dfrac{2}{3}\,5^3 \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = A_1 + A_2 + \dfrac{50}{3} \\[2ex] 1 = 2A_1 + 3\,A_2 + \dfrac{250}{3} \end{array}\right.$$

y tienen por valor

$$A_1 = \frac{97}{3} \quad \text{y} \quad A_2 = -49;$$

el término general de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 4\cdot 5^n$ es

$$u_n = \frac{97}{3}\,2^n - 49\cdot 3^n + \frac{2}{3}\,5^{n+2};$$

en particular:

$$u_2 = \frac{97}{3}\,2^2 - 49\cdot 3^2 + \frac{2}{3}\,5^4 = 105 \;\; \text{y} \;\; u_5 = \frac{97}{3}\,2^5 - 49\cdot 3^5 + \frac{2}{3}\,5^7 = 41\,211.$$

b) La ecuación homogénea $v_n = 5\,v_{n-1} - 6\,v_{n-2}$ tiene por solución general $v_n = A_1\,2^n + A_2\,3^n$. Como 3 es raíz simple de la ecuación característica $r^2 - 5\,r + 6 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 5\cdot 3^n$ es, según (II.B.1$_2$),

$$u_n = A_1\,2^n + A_2\,3^n + \frac{5\cdot 3^2}{5\cdot 3 + 2(-6)}\,n\,3^n = A_1\,2^n + (A_2 + 15\,n)\,3^n$$

Las constantes A_1 y A_3 son soluciones del sistema

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= A_1\,2^0 + A_2\,3^0 \\ u_1 &= 2\,A_1 + 3\,A_2 + 45 \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} 3 &= A_1 + A_3 \\ 1 &= 2\,A_1 + 3\,A_2 + 45 \end{aligned}$$

y tienen por valor

$$A_1 = 53 \text{ y } A_2 = -50;$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 5\cdot 3^n$ es

$$u_n = 53\cdot 2^n + (-50 + 15\,n)\,3^3;$$

en particular:

$$u_2 = 53\cdot 4 + (-50+30)\,9 = 32 \text{ y } u_5 = 53\cdot 2^5 + (-50+15\cdot 5)\,3^5 = 7\,771.$$

c) La ecuación homogénea $v_n = 4\,v_{n-1} - 4\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 4\,r + 4 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 2$; su solución general es entonces $v_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n$. Como (-1) no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 4\,r + 4 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 3(-1)^n$ es, según (II.B.1$_1$),

$$u_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n + \frac{3(-1)^2}{(-1)^2 - 4(-1) + 4}\,(-1)^n = \\ = (A_1 + A_2\,n)^n + \frac{1}{3}\,(-1)^n$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= A_1\,2^0 & &+ \frac{1}{3}\,(-1)^0 \\ u_1 &= 2\,A_1 + 2\,A_2 & &+ \frac{1}{3}\,(-1)^1 \end{aligned}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{aligned} 2 &= A_1 & &+ \frac{1}{3} \\ 0 &= 2\,A_1 + 2\,A_2 & &- \frac{1}{3} \end{aligned}\right.$$

y tienen por valor $A_1 = \dfrac{5}{3}$ y $A_2 = -\dfrac{3}{2}$;

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 3(-1)^n$$

es
$$u_n = (^5/_3 - ^3/_2\, n)\, 2^n + ^1/_3\, (-1)^n;$$
en particular:

$u_2 = (^5/_3 - 3)\, 2^2 + ^1/_3 = -5$ y $u_5 = (^5/_3 - ^3/_2 \cdot 5)\, 2^5 - ^1/_3 = -187.$

d) La ecuación homogénea $v_n = 4\, v_{n-1} - 4\, v_{n-2}$ tiene por solución general $v_n = (A_1 + A_2\, n)\, 2^n$. Como 2 es raíz doble de la ecuación característica $r^2 - 4r + 4 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 4\, u_{n-1} - 4\, u_{n-2} + 5 \cdot 2^n$ es, según (II.B.1$_3$),
$$u_n = (A_1 + A_2\, n)\, 2^n + {}^5/_2\, n^2 \cdot 2^n = (A_1 + A_2\, n + {}^5/_2\, n^2)\, 2^n.$$

Las constantes A_1 y A_2 son soluciones del sistema
$$\begin{cases} u_0 = A_1 \cdot 2^0 \\ u_1 = (A_1 + A_2 + {}^5/_2)\, 2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 3 = A_1 \\ 10 = 2\, A_1 + 2\, A_2 + 5 \end{cases}$$
y tienen por valor $A_1 = 3$ y $A_2 = -{}^1/_2$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 3$, $u_1 = 10$ y por la relación de recurrencia $u_n = 4\, u_{n-1} - 4\, u_{n-2} + 5 \cdot 2^n$ es, $u_n = (3 - {}^1/_2\, n + {}^5/_2\, n^2)\, 2^n$; en particular
$$u_2 = (3 - 1 + {}^5/_2 \cdot 4)\, 2^2 = 48 \quad \text{y} \quad u_5 = (3 - {}^5/_2 + {}^5/_2 \cdot 5^2)\, 2^5 = 2\,016.$$

e) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - r + 1 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = e^{i\pi/3}$ y $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\pi/3}$; su solución general es entonces
$$v_n = A_1 \cos \frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}.$$

Como -2 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - r + 1 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + (-2)^n$ es, según (II.B.1$_1$),
$$u_n = A_1 \cos \frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \frac{4}{4+2+1}\, (-2)^n = A_1 \cos \frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \frac{4}{7}\, (-2)^n.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema
$$\begin{cases} u_0 = A_1 + \dfrac{4}{7} \\ u_1 = A_1 \cos \dfrac{\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{8}{7} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 0 = A_1 + \dfrac{4}{7} \\ 1 = \dfrac{1}{2}\, A_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, A_2 - \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = -\frac{4}{7} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{34\sqrt{3}}{21};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + (-2)^n$ es

$$u_n = -\frac{4}{7}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{34\sqrt{3}}{21}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + \frac{4}{7}(-2)^n;$$

en particular:

$$u_2 = -\frac{4}{7}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{34\sqrt{3}}{21}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \frac{16}{7} = 5$$

$$\text{y} \quad u_5 = -\frac{4}{7}\cos\frac{5\pi}{3} + \frac{34\sqrt{3}}{21}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} + \frac{4}{7}(-2)^5 = -21.$$

7. *a*) La ecuación homogénea $v_n = 5v_{n-1} - 6v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$; su solución general es entonces $v_n = A_1 2^n + A_2 3^n$. Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 1 - n + 2n^2$ es

$$u_n = A_1 2^n + A_2 3^n + Q_2(n),$$

en donde $Q_2(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ es un polinomio de segundo grado en n, solución particular de la ecuación $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 1 - n + 2n^2$. Determinemos α, β y γ identificando los términos en n^2, n, y n^0 en la ecuación

$$Q_2(n) = 5\,Q_2(n-1) - 6\,Q_2(n-2) + 1 - n + 2n^2.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
\alpha n^2 + \beta n + \gamma = \\
&= 5[\alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \gamma] - \\
&\quad - 6[\alpha(n-2)^2 + \beta(n-2) + \gamma] + 1 - n + 2n^2 \\
&= 5[\alpha n^2 - 2\alpha n + \alpha + \beta n - \beta + \gamma] - \\
&\quad - 6[\alpha n^2 - 4\alpha n + 4\alpha + \beta n - 2\beta + \gamma] + 1 - n + 2n^2 \\
&= (5\alpha - 6\alpha + 2)n^2 + (-10\alpha + 24\alpha + 5\beta - 6\beta - 1)n + \\
&\quad + 5\alpha - 5\beta + 5\gamma - 24\alpha + 12\beta - 6\gamma + 1 \\
&= (2 - \alpha)n^2 + (14\alpha - \beta - 1)n + (-19\alpha + 7\beta - \gamma + 1);
\end{aligned}$$

α, β y γ verifican el sistema

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \alpha \\ \beta = 14\,\alpha - \beta - 1 \\ \gamma = -19\,\alpha + 7\,\beta - \gamma + 1, \end{cases}$$

que tiene por solución

$$\alpha = 1,\ \beta = 13/2 \quad \text{y} \quad \gamma = 55/4,$$

de tal manera que

$$Q_2(n) = n^2 + \frac{13}{2}n + \frac{55}{4}.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 2^0 + A_2 3^0 + Q_2(0) \\ u_1 = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 3 + Q_2(1) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 1 = A_1 + A_2 + 55/4 \\ 3 = 2\,A_1 + 3\,A_2 + 85/4 \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = -20 \quad \text{y} \quad A_2 = 29/4;$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 6\,u_{n-2} + 1 - n + 2\,n^2$$

es

$$u_n = -20 \cdot 2^n + {}^{29}/_4\, 3^n + n^2 + {}^{13}/_2\, n + {}^{55}/_4 =$$
$$= -5 \cdot 2^{n+2} + {}^{29}/_4\, 3^n + n^2 + {}^{13}/_2\, n + {}^{55}/_4;$$

en particular:

$$u_3 = -5 \cdot 2^5 + {}^{29}/_4 \cdot 3^3 + 3^2 + {}^{39}/_2 + {}^{55}/_4 = 78$$
$$\text{y} \quad u_5 = -5 \cdot 2^7 + {}^{29}/_4 \cdot 3^5 + 5^2 + {}^{65}/_2 + {}^{55}/_4 = 1\,193.$$

b) La ecuación homogénea característica $v_n = 3\,v_{n-1} - 9\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 3\,r + 9 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 3\,e^{i\pi/3}$ y $r_2 = \overline{r_1} = 3\,e^{-i\pi/3}$; su solución general es entonces

$$v_n = 3^n \left(A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \right).$$

Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 3\,r + 9 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 3\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2} + n$ es

$$u_n = 3^n \left(A_1 \cos\frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \right) + Q_1(n)$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n, solución particular de la ecuación $u_n = 3\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2} + n$. Determinemos α y β identificando los términos en n y las constantes en la ecuación

$$Q_1(n) = 3\,Q_1(n-1) - 9\,Q_1(n-2) + n.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \alpha n + \beta &= 3[\alpha(n-1) + \beta] - 9[\alpha(n-2) + \beta] + n \\ &= 3\,\alpha n - 3\,\alpha + 3\,\beta - 9\,\alpha n + 18\,\alpha - 9\,\beta + n \\ &= [-6\,\alpha + 1]\,n + [15\,\alpha - 6\,\beta]; \end{aligned}$$

α y β verifican el sistema $\begin{cases} \alpha = -6\,\alpha + 1 \\ \beta = 15\,\alpha - 6\,\beta \end{cases}$ que tiene por solución $\alpha = \dfrac{1}{7}$ y $\beta = \dfrac{15}{49}$ de tal manera que $Q_1(n) = \dfrac{1}{7}n + \dfrac{15}{49}$.

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = 3^0[A_1 \cos 0 + A_2 \operatorname{sen} 0] + Q_1(0) \\ u_1 = 3\left[A_1 \cos\dfrac{\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right] + Q_1(1) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 1 = A_1 + \dfrac{15}{49} \\ 2 = \dfrac{3}{2}A_1 + 3\,\dfrac{A_2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{22}{49} \end{cases}$$

y tienen por valor $A_1 = \dfrac{34}{49}$ y $A_2 = \dfrac{50\sqrt{3}}{49 \cdot 9}$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y por la relación de recurrencia $u_n = 3\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2} + n$ es

$$u_n = \frac{2 \cdot 3^n}{49}\left[17 \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{9} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right] + \frac{1}{7}n + \frac{15}{49};$$

en particular

$$u_3 = \frac{2 \cdot 3^3}{49}[-17] + \frac{3}{7} + \frac{15}{49} = -18 \quad \text{y} \quad u_5 = \frac{2 \cdot 3^5}{49} \cdot \frac{13}{3} + \frac{5}{7} + \frac{15}{49} = 44.$$

c) La ecuación homogénea $v_n = 4\,v_{n-1} - 4\,v_{n-2}$ tiene por solución general $v_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n$. Como 1 no es raíz de la ecuación característica $r^2 - 4\,r + 4 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia

$$u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 1 + n + n^2 \quad \text{es} \quad u_n = (A_1 + A_2\,n)\,2^n + Q_2(n)$$

en donde $Q_2(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ es un polinomio de segundo grado en n, solución particular de la ecuación $u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 1 + n + n^2$. Determinemos α, β y γ identificando los términos de n^2, n y n^0 en la ecuación

$$Q_2(n) = 4\,Q_2(n-1) - 4\,Q_2(n-2) + 1 + n + n^2.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
\alpha n^2 + \beta n + \gamma &= 4[\alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \gamma] - \\
&\quad - 4[\alpha(n-2)^2 + \beta(n-2) + \gamma] + 1 + n + n^2 \\
&= 4[\alpha n^2 - 2\,\alpha n + \alpha + \beta n - \beta + \gamma] - \\
&\quad - 4[\alpha n^2 - 4\,n\alpha + 4\,\alpha + \beta n - 2\,\beta + \gamma] + 1 + n + n^2 \\
&= n^2 + (-8\,\alpha + 4\,\beta + 16\,\alpha - 4\,\beta + 1)\,n + \\
&\quad + (4\,\alpha - 4\,\beta + 4\,\gamma - 16\,\alpha + 8\,\beta - 4\,\gamma) + 1 \\
&= n^2 + (8\,\alpha + 1)\,n + (-12\,\alpha + 4\,\beta + 1);
\end{aligned}$$

α, β y γ verifican el sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 8\,\alpha + 1 \\ \gamma = -12\,\alpha + 4\,\beta + 1 \end{cases}$$

que tiene por solución $\alpha = 1$, $\beta = 9$ y $\gamma = 25$, de tal manera que

$$Q_2(n) = n^2 + 9\,n + 25.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema:

$$\begin{cases} u_0 = A_1\,2^0 + Q_2(0) \\ u_1 = (A_1 + A_2)\,2^1 + Q_2(1) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 0 = A_1 + 25 \\ 3 = 2\,A_1 + 2\,A_2 + 35 \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = -25 \text{ y } A_2 = 9;$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 1 + n + n^2$$

es

$$u_n = (-25 + 9\,n)\,2^n + n^2 + 9\,n + 25;$$

en particular:

$$u_3 = (-25 + 27)\,2^3 + 9 + 27 + 25 = 77$$
$$\text{y} \quad u_5 = (-25 + 45)\,2^5 + 25 + 45 + 25 = 735.$$

d) La ecuación homogénea $v_n = 5\,v_{n-1} - 4\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 5\,r + 4 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = 4$; su solución general es entonces $v_n = A_1 + A_2 4^n$. Como 1 es raíz simple de la ecuación característica $r^2 - 5\,r + 4 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 5\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + + 2 + 3\,n$ es

$$u_n = A_1 + A_2 4^n + nQ_1(n),$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n tal que $nQ_1(n)$ sea solución particular de la ecuación $u_n = 5\,u_{n-1} - - 4\,u_{n-2} + 2 + 3\,n$.

Determinemos α y β identificando los términos en n^2, n y n^0 en la ecuación

$$nQ_1(n) = 5\,(n-1)\,Q_1(n-1) - 4\,(n-2)\,Q_1(n-2) + 2 + 3\,n.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
\alpha n^2 + \beta n &= 5(n-1)\,[\alpha(n-1) + \beta] - \\
&\quad - 4(n-2)\,[\alpha(n-2) + \beta] + 2 + 3\,n \\
&= 5\,\alpha(n-1)^2 + 5\,\beta(n-1) - \\
&\quad - 4\,\alpha(n-2)^2) - 4\,\beta(n-2) + 2 + 3\,n \\
&= 5\,\alpha n^2 - 10\,\alpha n + 5\,\alpha + 5\,\beta n - 5\,\beta - \\
&\quad - 4\,\alpha n^2 + 16\,\alpha n - 16\,\alpha - 4\,\beta n + 8\,\beta + 2 + 3\,n \\
&= [5\,\alpha - 4\,\alpha]\,n^2 + [-10\,\alpha + 5\,\beta + 16\,\alpha - 4\,\beta + 3]\,n - \\
&\quad - [5\,\alpha - 5\,\beta - 16\,\alpha + 8\,\beta + 2] \\
&= \alpha n^2 + [6\,\alpha + \beta + 3]\,n + [-11\,\alpha + 3\,\beta + 2];
\end{aligned}$$

α y β verifican el sistema

$$\begin{cases} \beta = 6\,\alpha + \beta + 3 \\ 0 = -11\,\alpha + 3\,\beta + 2, \end{cases}$$

que tiene por solución

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ y } \beta = -\frac{5}{2}$$

de manera que

$$Q_1(n) = -\frac{1}{2}\,n - \frac{5}{2}.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 + A_2 4^0 + 0\,Q_1(0) \\ u_1 = A_1 + A_2 \cdot 4 + 1 \cdot Q_1(1) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 2 = A_1 + A_2 \\ 5 = A_1 + 4\,A_2 - 3 \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = 0 \text{ y } A_2 = 2;$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = 5\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} + 2 + 3\,n$$

es

$$u_n = 2 \cdot 4^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n;$$

en particular:

$$u_3 = 2 \cdot 4^3 - \frac{1}{2}3^2 - \frac{5}{2} \cdot 3 = 116 \text{ y } u_5 = 2 \cdot 4^5 - \frac{1}{2}5^2 - \frac{5}{2} \cdot 5 = 2\,023.$$

e) La ecuación homogénea $v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 2\,r + 1 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 1$; su solución general es entonces $v_n = A_1 + A_2\,n$. Como 1 es raíz doble de la ecuación característica $r^2 - 2\,r + 1 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} - 3 + 4\,n$ es

$$u_n = A_1 + A_2\,n + n^2\,Q_1(n),$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n tal que $n^2\,Q_1(n)$ sea solución particular de la ecuación $u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} - 3 + 4\,n$.

Determinemos α y β identificando los términos en n^3, n^2, n y n^0 en la ecuación

$$n^2\,Q_1(n) = 2(n-1)^2\,Q_1(n-1) - (n-2)^2\,Q_1(n-2) - 3 + 4\,n.$$

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
\alpha n^3 + \beta n^2 &= 2[\alpha(n-1)^3 + \beta(n-1)^2] - \\
&\quad - [\alpha(n-2)^3 + \beta(n-2)^2] - 3 + 4\,n \\
&= 2\,\alpha(n^3 - 3\,n^2 + 3\,n - 1) + 2\,\beta(n^2 - 2\,n + 1) - \\
&\quad - \alpha(n^3 - 6\,n^2 + 12\,n - 8) - \beta(n^2 - 4\,n + 4) - 3 + 4\,n \\
&= [2\,\alpha - \alpha]\,n^3 + [-6\,\alpha + 2\,\beta + 6\,\alpha - \beta]\,n^2 + \\
&\quad + [6\,\alpha - 4\,\beta - 12\,\alpha + 4\,\beta + 4]\,n \\
&\quad + [-2\,\alpha + 2\,\beta + 8\,\alpha - 4\,\beta - 3] \\
&= \alpha n^3 + \beta n^2 + [-6\,\alpha + 4]\,n + [6\,\alpha - 2\,\beta - 3];
\end{aligned}$$

α y β verifican el sistema

$$\begin{cases} 0 = -6\,\alpha + 4 \\ 0 = 6\,\alpha - 2\,\beta - 3 \end{cases} \quad \text{que tiene por solución } \alpha = \frac{2}{3} \text{ y } \beta = \frac{1}{2},$$

de tal manera que $Q_1(n) = \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{2}$.

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 \\ u_1 = A_1 + A_2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 1 = A_1 \\ 2 = A_1 + A_2 + \dfrac{7}{6} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = 1 \text{ y } A_2 = -\frac{1}{6};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y por la relación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} - 3 + 4\,n$ es

$$u_n = 1 - \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{2}{3}n^3$$

en particular:

$$u_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 18 = 23 \quad \text{y} \quad u_5 = 1 - \frac{5}{6} + \frac{25}{2} + \frac{250}{3} = 96.$$

f) La ecuación homogénea $v_n = 7\,v_{n-1} - 10\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - 7\,r + 10 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 5$; su solución general es entonces $A_1\,2^n + A_2\,5^n$. Como 3 y 1 no son raíces de la ecuación característica $r^2 - 7\,r + 10 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 7\,u_{n-1} - 10\,u_{n-2} + 3^n + 4\,n$ *es*

$$u_n = A_1\,2^n + A_2\,5^n + C \cdot 3^n + Q_1(n),$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n. Determinemos C, α y β identificando los términos en 3^n, n y las constantes en la ecuación

$$C \cdot 3^n + Q_1(n) = 7[C \cdot 3^{n-1} + Q_1(n-1)] - \\ - 10[C \cdot 3^{n-2} + Q_1(n-2) + 3^n + 4\,n.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} C \cdot 3^n + \alpha n + \beta &= 7\,C \cdot 3^{n-1} + 7\,\alpha(n-1) + 7\,\beta - 10\,C \cdot 3^{n-2} - \\ &\quad - 10\,\alpha(n-2) - 10\,\beta + 3^n + 4\,n \\ &= \left[\frac{7}{3}C - \frac{10}{9}C + 1\right] 3^n + [7\,\alpha - 10\,\alpha + 4]\,n + \\ &\quad + [-7\,\alpha + 7\,\beta + 20\,\alpha - 10\,\beta] \\ &= \left[\frac{11\,C}{9} + 1\right] 3^n + [4 - 3\,\alpha]\,n + [13\,\alpha - 3\,\beta]; \end{aligned}$$

C, α y β verifican el sistema

$$\begin{cases} C = \dfrac{11}{9}C + 1 \\ \alpha = 4 - 3\alpha \\ \beta = 13\alpha - 3\beta \end{cases}$$ que tiene por solución $C = -\dfrac{9}{2}$, $\alpha = 1$ y $\beta = \dfrac{13}{4}$

de tal manera que $A_1 2^n + A_2 5^n - \dfrac{9}{2}3^n + n + \dfrac{13}{4}$ es la solución de la ecuación de recurrencia. Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 + A_2 - \dfrac{9}{2} + \dfrac{13}{4} \\ u_1 = 2A_1 + 5A_2 - \dfrac{27}{2} + \dfrac{17}{4} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 2 = A_1 + A_2 - \dfrac{5}{4} \\ 1 = 2A_1 + 5A_2 - \dfrac{37}{4} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = 2 \text{ y } A_2 = \frac{5}{4};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2} + 3^n + 4n$ es

$$u_n = 2 \cdot 2^n + \frac{5}{4} \cdot 5^n - \frac{9}{2}3^n + n + \frac{13}{4} = 2^{n+1} + \frac{5^{n+1}}{4} - \frac{3^{n+2}}{2} + n + \frac{13}{4};$$

en particular:

$$u_3 = 2^4 + \frac{5^4}{4} - \frac{3^5}{2} + 3 + \frac{13}{4} = 57$$

$$\text{y} \quad u_5 = 2^6 + \frac{5^6}{4} - \frac{3^7}{2} + 5 + \frac{13}{4} = 2\,885.$$

g) La ecuación homogénea $v_n = 2v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por solución general $v_n = A_1 + A_2 n$. Como 1 es raíz doble de la ecuación característica $r^2 - 2r + 1 = 0$, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 3n + 5$ es

$$u_n = A_1 + A_2 n + C \cdot 2^n + n^2 Q_1(n),$$

en donde $Q_1(n) = \alpha n + \beta$ es un polinomio de primer grado en n. Determinemos C, α y β identificando los términos en 2^n, n^3, n^2, n y las constantes en la ecuación

$$C \cdot 2^n + n^2 Q_1(n) = 2[C \cdot 2^{n-1} + (n-1)^2 Q_1(n-1)] - \\ - [C \cdot 2^{n-2} + (n-2)^2 Q_1(n-2)] + 2^n + 3n + 5.$$

Se obtiene entonces:

$$
\begin{aligned}
C \cdot 2^n + \alpha n^3 + \beta n^2 &= \\
&= C \cdot 2^n + 2\alpha(n-1)^3 + 2\beta(n-1)^2 - C \cdot 2^{n-2} \\
&\qquad - \alpha(n-2)^3 - \beta(n-2)^2 + 2^n + 3n + 5 \\
&= \left[C - \frac{C}{4} + 1\right] 2^n + [2\alpha - \alpha]\, n^3 + [-6\alpha + 2\beta + 6\alpha - \beta]\, n^2 + \\
&\qquad + [6\alpha - 4\beta - 12\alpha + 4\beta + 3]\, n \\
&\qquad + [-2\alpha + 2\beta + 8\alpha - 4\beta + 5] \\
&= \left[\frac{3C}{4} + 1\right] 2^n + \alpha n^3 + \beta n^2 + [-6\alpha + 3]\, n + [6\alpha - 2\beta + 5];
\end{aligned}
$$

C, α y β

$$
\begin{cases}
C = \dfrac{3C}{4} + 1 \\
0 = -6\alpha + 3 \\
0 = 6\alpha - 2\beta + 5
\end{cases}
$$

que tiene por solución $C = 4$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ y $\beta = 4$ de tal manera que

$$A_1 + A_2 n + 4 \cdot 2^n + \frac{1}{2} n^3 + 4n^2$$

es solución de la ecuación de recurrencia.

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$
\begin{cases}
u_0 = A_1 \qquad + 4 \cdot 2^0 \\
u_1 = A_1 + A_2 + 4 \cdot 2 + \dfrac{1}{2} + 4
\end{cases}
\quad \text{o bien} \quad
\begin{cases}
0 = A_1 \qquad + 4 \\
2 = A_1 + A_2 + \dfrac{25}{2}
\end{cases}
$$

y tienen por valor

$$A_1 = -4 \quad \text{y} \quad A_2 = -\frac{13}{2};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 3n + 5$$

es

$$u_n = -4 - \frac{13}{2} n + 4 n^2 + \frac{n^3}{2} + 2^{n+2};$$

en particular:

$$u_3 = -4 - \frac{13}{2} \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \frac{3^3}{2} + 2^5 = 58$$

$$\text{y} \quad u_5 = -4 - \frac{13}{2} \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + \frac{5^3}{2} + 2^7 = 254.$$

h) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} + 6\, v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - r - 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$; su solución general es entonces $v_n = A_1\, 3^n + A_2\, (-2)^n$. Como 1 y 2 no son raíces de la ecuación característica, la solución general de la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 6\, u_{n-2} + n^2\, 2^n$ es

$$u_n = A_1\, 3^n + A_2(-2)^n + 2^n\, Q_2(n),$$

en donde $Q_2(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ es un polinomio de segundo grado en n. Determinemos α, β y γ identificando los términos en n^2, 2^n, $n\, 2^n$ y 2^n en la ecuación

$$2^n\, Q_2(n) = 2^{n-1}\, Q_2\,(n-1) + 6 \cdot 2^{n-2}\, Q_2(n-2) + n^2\, 2^n.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
2^n[\alpha n^2 + \beta n + \gamma] &= \\
&= 2^{n-1}[\alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \gamma] + \\
&\quad + 6 \cdot 2^{n-2}\, [\alpha(n-2)^2 + \beta(n-2) + \gamma] + n^2\, 2^n \\
&= 2^{n-1}\, [\alpha n^2 - 2\, \alpha n + \alpha + \beta n - \beta + \gamma] + \\
&\quad + 3 \cdot 2^{n-1}\, [\alpha n^2 - 4\, \alpha n + 4\, \alpha + \beta n - 2\, \beta + \gamma] + n^2\, 2^n \\
&= 2^{n-1}[(\alpha + 3\, \alpha + 2)\, n^2 + (-2\, \alpha + \beta - 12\, \alpha + 3\, \beta)\, n + \\
&\quad + (\alpha - \beta + \gamma + 12\, \alpha - 6\, \beta + 3\, \gamma)] \\
&= 2^n \left[(2\, \alpha + 1)\, n^2 + (-7\, \alpha + 2\, \beta) n + \frac{13\, \alpha - 7\, \beta}{2} + 2\, \gamma\right];
\end{aligned}$$

α, β y γ verifican el sistema

$$\begin{cases} \alpha = 2\,\alpha + 1 \\ \beta = -7\,\alpha + 2\,\beta \\ \gamma = \dfrac{13\,\alpha - 7\,\beta}{2} + 2\,\gamma \end{cases}$$

que tiene por solución $\alpha = -1$, $\beta = -7$ y $\gamma = -18$, de tal manera que $Q_2(n) = n^2 - 7\,n - 18$.

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 + A_2 \quad -18 \\ u_1 = 3\,A_1 - 2\,A_2 - 52 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \quad -18 \\ 2 = 3\,A_1 - 2\,A_2 - 52 \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = 92/5 \text{ y } A_2 = 3/5;$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y por la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 2^n\,n^2$ es

$$u_n = \frac{92}{5}\,3^n + \frac{3}{5}\,(-2)^n - 2^n(n^2 + 7\,n + 18);$$

en particular:

$$u_3 = \frac{92}{5}\cdot 3^3 + \frac{3}{5}\,(-2)^3 - 2^3(3^2 + 21 + 18) = 108$$

$$\text{y} \quad u_5 = \frac{92}{5}\cdot 3^5 + \frac{3}{5}\,(-2)^5 - 2^5[5^2 + 35 + 18] = 1\,956.$$

i) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} + 2\,v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$; su solución general es entonces $v_n = A_1\,2^n + A_2(-1)^n$. La ecuación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1} + 2\,u_{n-2} + 3\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$$

tiene una solución particular de la forma

$$u_n^* = \lambda\cos\frac{n\pi}{6} + \mu\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}.$$

Determinemos λ y μ identificando los términos en $\cos n\pi/6$ y $\text{sen}\; n\pi/6$ en la ecuación

$$u_n^* = u_{n-1}^* + 2\,u_{n-2}^* + 3\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}.$$

Se obtiene entonces

$$\lambda \cos \frac{n\pi}{6} + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} = \lambda \cos (n-1)\frac{\pi}{6} + \mu \operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{6} +$$

$$+ 2\left[\lambda \cos (n-2)\frac{\pi}{6} + \mu \operatorname{sen} (n-2)\frac{\pi}{6}\right] + 3 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

$$= \lambda \cos\frac{n\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + \lambda \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} +$$

$$+ \mu \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - \mu\cos\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} +$$

$$+ 2\lambda\cos\frac{n\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + 2\lambda\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} +$$

$$+ 2\mu\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} - 2\mu\cos\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + 3\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

$$= \cos\frac{n\pi}{6}\left[\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu}{2} + \lambda - \mu\sqrt{3}\right] +$$

$$+ \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\left[\frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda\sqrt{3} + \mu + 3\right];$$

λ y μ verifican el sistema

$$\begin{cases}\lambda = \lambda\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mu}{2} + \lambda - \mu\sqrt{3}\\ \mu = \dfrac{\lambda}{2} + \mu\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \lambda\sqrt{3} + \mu + 3\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}\lambda\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mu\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\right)\\ -3 = \lambda\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\right) + \mu\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

que tiene por solución

$$\lambda = \frac{3(2-7\sqrt{3})}{26} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{3(3-4\sqrt{3})}{26}$$

de tal manera que la ecuación $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3 \operatorname{sen} n\pi/6$ tiene por solución particular

$$u_n^* = \frac{3(2-7\sqrt{3})}{26}\cos\frac{n\pi}{6} + \frac{3(3-4\sqrt{3})}{26}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

y por solución general:

$$u_n = A_1 2^n + A_2 (-1)^n + \frac{3(2-7\sqrt{3})}{26}\cos\frac{n\pi}{6} + \frac{3(3-4\sqrt{3})}{26}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = 2 = A_1 \quad + A_2 + 3\dfrac{2-7\sqrt{3}}{26} \\ u_1 = -1 = 2A_1 - A_2 + 3\dfrac{2-7\sqrt{3}}{26}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3(3-4\sqrt{3})}{26}\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = \frac{47+24\sqrt{3}}{78} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{7+3\sqrt{3}}{6};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_2 = -1$ y por la relación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3\operatorname{sen} n\pi/6$$

es

$$u_n = \frac{47+24\sqrt{3}}{78}2^n + \frac{7+3\sqrt{3}}{6}(-1)^n + \\ + 3\frac{2-7\sqrt{3}}{26}\cos\frac{n\pi}{6} + 3\frac{3-4\sqrt{3}}{26}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6};$$

en particular $u_3 = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ y $u_5 = \dfrac{39}{2} + 9\sqrt{3}$.

j) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por ecuación característica $r^2 - r + 1 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = e^{i\pi/3}$ y $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i/\pi 3}$; su solución general es entonces $v_n = A_1 \cos n\pi/3 + A_2 \operatorname{sen} n\pi/3$. La ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 3\cos n\pi/4$ tiene una solución particular de la forma $u_n^* = \lambda\cos n\pi/4 + \mu\operatorname{sen} n\pi/4$. Determinemos λ y μ identificando los términos en $\cos n\pi/4$ y $\operatorname{sen} n\pi/4$ en la ecuación

$$u_n^* = u_{n-1}^* - u_{n-2}^* + 3\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Se obtiene entonces

$$\lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} = \lambda \cos \frac{(n-1)\pi}{4} + \mu \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{4} -$$

$$- \left[\lambda \cos \frac{(n-2)\pi}{4} + \mu \operatorname{sen} \frac{(n-2)\pi}{4} \right] + 3 \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$= \lambda \cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \lambda \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \mu \cos \frac{n\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} -$$

$$- \lambda \cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \lambda \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} -$$

$$- \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \mu \cos \frac{n\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$= \cos \frac{n\pi}{4} \left[\lambda \frac{\sqrt{2}}{2} - \mu \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu + 3 \right] +$$

$$+ \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \left[\lambda \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right] ;$$

λ y μ verifican el sistema

$$\begin{cases} \lambda = \lambda \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mu \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mu + 3 \\ \mu = \lambda \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mu \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{cases} \quad \text{, que tiene por solución } \lambda = -\mu = 3 \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

de tal manera que la ecuación $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 3 \cos \frac{n\pi}{4}$ tiene por solución particular

$$u_n^* = 3 \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} - 3 \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

y por solución general:

$$u_n = A_1 \cos \frac{n\pi}{3} + A_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + 3 \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} - 3 \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = 0 = A_1 + 3\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ u_1 = 2 = \dfrac{1}{2}A_1 + A_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = -3\frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{14\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{6};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 0$, y $u_1 = 2$ y por la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 3\cos n\pi/4$ es

$$u_n = -3\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{14\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + $$
$$+ 3\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{3}\cos\frac{n\pi}{4} - 3\frac{2+\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$$
$$= -3\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{14\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3};$$

en particular

$$u_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad u_5 = -5 - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

k) La ecuación homogénea $v_n = v_{n-1} - v_{n-2}$ tiene por solución $v_n = A_1 \cos n\pi/3 + A_2 \operatorname{sen} n\pi/3$. La ecuación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 2\cos n\pi/3$$

tiene una solución particular de la forma

$$u_n^* = \left(\lambda\cos\frac{n\pi}{3} + \mu\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)n,$$

ya que $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ es solución de la ecuación homogénea. Determinemos λ y μ identificando los términos en $\cos\dfrac{n\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}$ en la ecuación

$$u_n^* = u_{n-1}^* - u_{n-2}^* + 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Se obtiene entonces

$$n\left[\lambda \cos\frac{n\pi}{3} + \mu \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right] =$$

$$= (n-1)\left[\lambda \cos (n-1)\frac{\pi}{3} + \mu \operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{3}\right] -$$

$$-(n-2)\left[\lambda \cos (n-2)\frac{\pi}{3} + \mu \operatorname{sen}(n-2)\frac{\pi}{3}\right] + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$= (n-1)\left[\lambda \cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \lambda \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + \mu \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \mu\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right] -$$

$$-(n-2)\left[\lambda \cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \lambda \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + \mu \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \mu\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right] + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$= (n-1)\left[\cos\frac{n\pi}{3}\left(\frac{\lambda}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left(\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\right] -$$

$$-(n-2\left[\cos\frac{n\pi}{3}\left(-\frac{\lambda}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left(\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\right] + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$= n\left[\cos\frac{n\pi}{3}\left(\frac{\lambda}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left(\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mu}{2} - \lambda\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\right] +$$

$$+ \cos\frac{n\pi}{3}\left(-\frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda - \mu\sqrt{3} + 2\right) +$$

$$+ \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left(-\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu}{2} + \lambda\sqrt{3} - \mu\right) =$$

$$= n\left[\lambda\cos\frac{n\pi}{3} + \mu\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right] + \cos\frac{n\pi}{3}\left(-3\frac{\lambda}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right) +$$

$$+ \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left(-3\frac{\mu}{2} + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

λ y μ verifican al sistema

$$\begin{cases} 0 = -3\dfrac{\lambda}{2} - \mu\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 \\ 0 = -3\dfrac{\mu}{2} + \lambda\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad ; \text{ que tiene por solución } \lambda = 1 \text{ y } \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

de tal manera que la ecuación $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$ tiene por solución particular

$$u_n^* = \left(\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right) n$$

y por solución general

$$u_n = A_1\cos\frac{n\pi}{3} + A_2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + \left(\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right) n.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1\cos 0 = A_1 \\ u_1 = A_1\cos\dfrac{\pi}{3} + A_2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

o bien $\begin{cases} 1 = A_1 \\ 2 = \dfrac{A_1}{2} + A_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

y tienen por valor $A_1 = 1$ y $A_2 = \sqrt{3}/3$; el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 2\cos n\pi/3$ es

$$u_n = (1+n)\left[\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right];$$

en particular:

$$u_3 = 4\cos\pi = -4 \quad \text{y} \quad u_5 = 6\left[\cos\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right] = 0.$$

l) La ecuación homogénea $v_n = -v_{n-1} + 6v_{n-2}$ tiene por solución $v_n = A_1 2^n + A_2(-3)^n$. La ecuación de recurrencia

$$u_n = -u_{n-1} + 6u_{n-2} + 3\cos\frac{n\pi}{2} - 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

tiene una solución particular de la forma

$$u_n^* = \lambda \cos \frac{n\pi}{2} + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \lambda' \cos \frac{n\pi}{3} + \mu' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}:$$

Determinemos λ, μ, λ' y μ' identificando los términos en $\cos \frac{n\pi}{2}$, $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$; $\cos \frac{n\pi}{3}$ y $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}$ en la ecuación

$$u_n^* = -u_{n-1}^* + 6\, u_{n-2}^* + 3 \cos \frac{n\pi}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{3}:$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
&\lambda \cos \frac{n\pi}{2} + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \lambda' \cos \frac{n\pi}{3} + \mu' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} = \\
&\quad = -\Big[\lambda \cos (n-1) \frac{\pi}{2} + \mu \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{2} + \\
&\qquad\qquad + \lambda' \cos (n-1) \frac{\pi}{3} + \mu' \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{3}\Big] + \\
&\qquad + 6 \Big[\lambda \cos (n-2) \frac{\pi}{2} + \mu \operatorname{sen} (n-2) \frac{\pi}{2} + \\
&\qquad\qquad + \lambda' \cos (n-2) \frac{\pi}{3} + \mu' \operatorname{sen} (n-2) \frac{\pi}{3}\Big] + 3 \cos \frac{n\pi}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{3} \\
&\quad = -\Big[\lambda \cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \lambda \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \\
&\qquad - \mu \cos \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \lambda' \cos \frac{n\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \\
&\qquad + \lambda' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \mu' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \mu' \cos \frac{n\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\Big] + \\
&\qquad + 6 \Big[\lambda \cos \frac{n\pi}{2} \cos \pi + \lambda \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \pi + \mu \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \pi - \mu \cos \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \pi + \\
&\qquad + \lambda' \cos \frac{n\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \lambda' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + \\
&\qquad + \mu' \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \mu' \cos \frac{n\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\Big] + \\
&\qquad + 3 \cos \frac{n\pi}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}[\mu - 6\lambda + 3] + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}[-\lambda - 6\mu] +$$

$$+ \cos\frac{n\pi}{3}\left[-\frac{\lambda'}{2} + \mu'\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\lambda' - 3\mu'\sqrt{3} - 2\right] +$$

$$+ \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\left[-\lambda'\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu'}{2} + 3\lambda'\sqrt{3} - 3\mu'\right];$$

λ, μ, λ' y μ' verifican el sistema

$$\begin{cases} \lambda = \mu - 6\lambda + 3 \\ \mu = -\lambda - 6\mu \\ \lambda' = -\dfrac{7}{2}\lambda' - 5\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu' - 2 \\ \mu' = -\dfrac{7}{2}\mu' + 5\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda' \end{cases} \quad \text{que tiene por solución}$$

$$\lambda = \frac{21}{50}, \quad \mu = -\frac{3}{50}, \quad \lambda' = -\frac{3}{13} \quad \text{y} \quad \mu' = -\frac{5\sqrt{3}}{39}$$

de tal manera que la ecuación

$$u_n = -u_{n-1} + 6u_{n-2} + 3\cos\frac{n\pi}{2} - 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

tiene por solución particular

$$u_n^* = \frac{21}{50}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{3}{13}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{39}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

y por solución general

$$u_n = A_1 2^n + A_2(-3)^n + u_n^*.$$

Las constantes A_1 y A_2 son solución del sistema

$$\begin{cases} u_0 = A_1 + A_2 + \dfrac{21}{50} - \dfrac{3}{13} \\ u_1 = 2A_1 - 3A_2 - \dfrac{3}{50} - \dfrac{3}{26} - \dfrac{5}{26} \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} -1 = A_1 + A_2 + \dfrac{123}{650} \\ 3 = 2A_1 - 3A_2 - \dfrac{239}{650} \end{cases}$$

y tienen por valor

$$A_1 = -\frac{1}{25} \quad \text{y} \quad A_2 = -\frac{747}{650};$$

el término general u_n de la sucesión $\{u_n\}$ definida por sus dos primeros términos $u_0 = -1$, $u_1 = 3$ y la relación de recurrencia

$$u_n = -u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 3\cos\frac{n\pi}{2} - 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

es

$$u_n = -\frac{1}{25}2^n - \frac{747}{650}(-3)^n + \frac{21}{50}\cos\frac{n\pi}{2} - \\ -\frac{3}{50}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{3}{13}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{39}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3};$$

en particular $u_3 = 31$ y $u_5 = 278$.

8. *a*) El capital C_{n-1} se transforma al cabo de un año $C_{n-1}(1+i)$; como se retira la cantidad s al final del año, el estado de la cuenta al cabo de la n-ésima anualidad es

$$C_n = C_{n-1}(1+i) - s.$$

b) C_n es el término general de una ecuación de recurrencia de primer orden, cuyo segundo miembro es una constante. Entonces se tiene según (II.A.2$_1$)

$$C_n = (1+i)^n C_0 - s\,\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = (1+i)^n\left(C_0 - \frac{s}{i}\right) + \frac{s}{i}.$$

Para que la cuenta suministre una renta perpetua es preciso y basta que

$$C_n = (1+i)^n\left(C_0 - \frac{s}{i}\right) + \frac{s}{i}$$

sea positiva para todo entero n. Como $(1+i)^n$ y s/i son positivos se debe tener $C_0 \geqslant s/i$ o bien $s \leqslant i\,C_0$. Si $s = i\,C_0$ o bien $s/i = C_0$, se tiene $C_n = C_0$ para todo n; si $s < i\,C_0$, el crédito de la cuenta aumenta indefinidamente con n.

c) La cuenta cesa de ser acreedora en el momento en que

$$C_n = (1+i)^n\left(C_0 - \frac{s}{i}\right) + \frac{s}{i}$$

sea negativo. Es necesario según *b*) el tener $s > i\,C_0$. Entonces

$$(1+i)^n > -\frac{s}{i}\,\frac{1}{\left(C_0 - \dfrac{s}{i}\right)} = \frac{s}{s - i\,C_0}$$

o bien

$$n\log(1+i) > \log s - \log(s - i\,C_0)$$

y la cuenta cesa de ser acreedora a partir del n-simo año, siendo n el entero más pequeño tal que

$$n > \frac{\log s - \log (s - i\, C_0)}{\log (1 + i)}.$$

Aplicación numérica: Si $C = 1\,000$ ptas., $i = 4$ % y $s = 50$ ptas., la cuenta cesa de ser acreedora cuando

$$n > \frac{\log 50 - \log (50 - 40)}{\log (1{,}04)} = \frac{\log 5}{\log 1{,}04} = 41{,}02,$$

es decir en la 42 anualidad.

9. *a*) El capital C_{n-1} al cabo de un año se transforma en $C_{n-1}(1 + i)$; como al final de año se retira la cantidad $2^{n-1}\, s$, el estado de la cuenta al cabo de la n-sima anualidad es

$$C_n = C_{n-1}(1 + i) - 2^{n-1}\, s = C_{n-1}(1 + i) - 2^n \frac{s}{2}.$$

b) De acuerdo con (II.A.1$_1$) se tiene,

$$C_n = (1 + i)^n\, C_0 - s\, \frac{2^n - (1 + i)^n}{2 - (1 + i)} = (1 + i)^n \left(C_0 + \frac{s}{1 - i}\right) - \frac{2^n\, s}{1 - i};$$

la cuenta cesa de ser acreedora cuando

$$C_n = (1 + i)^n \left(C_0 + \frac{s}{1 - i}\right) - \frac{2^n\, s}{1 - i}$$

sea negativo

Se tiene entonces

$$(1 + i)^n \left[C_0 + \frac{s}{1 - i}\right] < \frac{2^n\, s}{1 - i} \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{1 + i}{2}\right)^n < \frac{s}{s + C_0\,(1 - i)},$$

o sea

$$n \log \frac{1 + i}{2} < \log \frac{s}{s + C_0(1 - i)};$$

como $\dfrac{1 + i}{2} < 1$, $\log \dfrac{1 + i}{2}$ es negativo y

$$n > \frac{\log s - \log [s + C_0(1 - i)]}{\log (1 + i) - \log 2}.$$

Aplicación numérica: Si $C = 1\,000$ ptas., $i = 4\ \%$ y $s = 50$ ptas., la cuenta cesa de ser acreedora cuando

$$n > \frac{\log 50 - \log 1{,}010}{\log (1{,}04) - \log 2} = \frac{\log 101 - \log 5}{\log 2 - \log (1{,}04)} =$$
$$= \frac{2{,}004\,32 - 0{,}698\,97}{0{,}301\,03 - 0{,}017\,03} = 4{,}5$$

es decir en la quinta anualidad.

10. *a*) Como $C_t = \alpha R_{t-1}$, se tiene

$$C_{t-1} = \alpha R_{t-2} \quad \text{e} \quad I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = \alpha\beta(R_{t-1} - R_{t-2});$$

resulta que

$$R_t = C_t + I_t + G_t = \alpha R_{t-1} + \alpha\beta(R_{t-1} - R_{t-2}) + 1 =$$
$$= \alpha(1 + \beta)\,R_{t-1} - \alpha\beta R_{t-2} + 1,$$

o sea:

$$R_t = \alpha(1 + \beta)\,R_{t-1} - \alpha\beta R_{t-2} + 1.$$

b) Si $0 < \alpha < 1$, la ecuación de recurrencia

$$R_t = \alpha(1 + \beta)\,R_{t-1} - \alpha\beta R_{t-2} + 1$$

tiene, según (II.B.2$_1$), una solución particular:

$$R_t = \frac{1}{1 - \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, 1 es raíz simple o doble de la ecuación característica

$$r^2 - (1 + \beta)\,r + \beta = 0$$

según que $\beta \neq 1$ o $\beta = 1$.

De ello resulta que si $\beta \neq 1$, $t/(1 - \beta)$ es según (II.B.2$_2$) solución particular de la ecuación de recurrencia $R_t = (1 + \beta)\,R_{t-1} - \beta R_{t-2} + 1$; si $\beta = 1$, $t^2/2$ es, según (II.B.2$_3$), solución particular de esta ecuación.

c) Cuando $\Delta = \alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\,\alpha\beta$ es positivo, es decir

$$\alpha > 4\beta/(1 + \beta)^2,$$

la ecuación característica $r^2 - \alpha(1 + \beta)\,r + \alpha\beta = 0$ tiene dos raíces distintas:

$$r_1 = \frac{\alpha(1 + \beta) + \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\,\alpha\beta}}{2},$$
$$r_2 = \frac{\alpha(1 + \beta) - \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\,\alpha\beta}}{2},$$

y

$$R_t = A_1 r_1^t + A_2 r_2^t + \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ \dfrac{t}{1-\beta} & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Cuando $\alpha = 4\beta/(1+\beta)^2$, $\Delta = 0$ y la ecuación característica tiene una raíz doble $r_1 = r_2 = \alpha(1+\beta)/2$; de aquí se deduce que

$$R_t = (A_1 + A_2 t)\frac{\alpha^t(1+\beta)^t}{2^t} + \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ t^2/2 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 1. \end{cases}$$

Cuando $\alpha < 4\beta/(1+\beta)^2$, $\Delta < 0$ y la ecuación característica tiene dos raíces imaginarias conjugadas $r_1 = \rho e^{i\theta}$ y $r_2 = \overline{r_1} = \rho e^{-i\theta}$ resultando que

$$R_t = \rho^t (A_t \cos t\theta + A_2 \operatorname{sen} t\theta) + \frac{1}{1-\alpha}.$$

11. *a*) Vamos a reunir en una tabla de doble entrada el capital de nuestro mercader según las etapas que va realizando cuando:

— el capital inicial es $x_0 = 15$ denarios;
— la operación comercial multiplica el capital por $q = 2$;
—los gastos son constantes e iguales a $c = 12$ denarios.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{t-1}	15	18	24	36	60	108	204	396	780	1 548
$2x_{t-1}$	30	36	48	72	120	216	408	792	1 560	3 096
$x_t = 2x_{t-1} - 12$	18	24	36	60	108	204	396	780	1 548	3 084

En efecto, si en la etapa $(t-1)$, el mercader tiene un capital x_{t-1}, en la época t él tiene el capital

$$x_t = 2x_{t-1} - 12 \tag{1}$$

ya que por una parte la operación comercial multiplica su capital por 2 y por otra él tiene 12 denarios de gastos.

La ecuación de recurrencia (1) es lineal de primer orden y según (II.A.2$_1$) se tiene:

$$x_t = 2^t \cdot 15 - 12 \frac{1-2^t}{1-2} = 3 \cdot 2^t + 12.$$

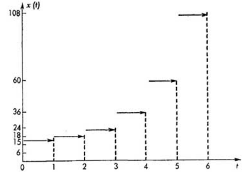


Fig. 29

El gráfico es una curva en escalera. Obsérvese que los puntos estarían alineados si se eligiera un sistema de coordenadas semilogarítmicas (logaritmos con base dos en las ordenadas).

b) Se propone determinar el capital inicial x_0 de nuestro mercader

cuando parte de Pisa para Luca (primera etapa),
vuelve a partir de Luca para Florencia (segunda etapa),
vuelve a partir de Florencia para Pisa (tercera etapa),

y al llegar a Pisa comprueba que su bolsa está vacía. Se tiene entonces:

$$x_3 = 12 + 2^3[x_0 - 12]$$

de acuerdo con (II.A.2$_1$) y $x_3 = 0$, ya que al cabo de la tercera etapa la bolsa del mercader está vacía, o sea:

$$0 = 12 + 2^3[x_0 - 12] \text{ o bien } x_0 = 12 - \frac{12}{2^3} = 10{,}5 \text{ denarios}$$

Comprobemos ese resultado:

$$x_1 = 2\,x_0 - 12 = 21 - 12 = 9,$$
$$x_2 = 2\,x_1 - 12 = 18 - 12 = 6,$$
$$x_3 = 2\,x_2 - 12 = 12 - 12 = 0.$$

c) Si en la etapa $(t-1)$ el mercader tuviera el capital x_{t-1}, en la etapa t poseería el capital

$$x_t = qx_{t-1} - c$$

ya que por una parte la operación comercial multiplica el capital por q, y por otra, tiene de gastos c denarios.

La ecuación de recurrencia $x_t = qx_{t-1} - c$ es lineal de primer orden, y si $c \neq q$ se tiene, según (II.A.2$_1$),

$$\boxed{x_t = q^t \left[x_0 - \frac{c}{q-1}\right] + \frac{c}{q-1}} .$$

Ya que $q > 1$, q^t es función creciente del tiempo t, y, según sea el signo de $x_0 - \dfrac{c}{q-1}$, x_t aumentará o disminuirá con el tiempo:

— si $x_0 < \dfrac{c}{q-1}$, x_t es función decreciente de t,

— si $x_0 > \dfrac{c}{q-1}$, x_t es función creciente de t.

Entonces si $x_0 < \dfrac{c}{q-1}$, x_t decrece con t y será nulo en la etapa t tal que:

$$0 = x_t = q^t \left[x_0 - \frac{c}{q-1}\right] + \frac{c}{q-1}$$

$$\text{o bien} \quad q^t = \frac{-\dfrac{c}{q-1}}{x_0 - \dfrac{c}{q-1}} = \frac{1}{1 - \dfrac{q-1}{c} x_0}$$

y al pasar a logaritmos decimales, se tendrá:

$$t \log q = \log \frac{1}{1 - \dfrac{q-1}{c} x_0} x_0 = -\log \left(1 - \frac{q-1}{c} x_0\right)$$

o sea

$$\boxed{t = -\frac{\log \left(1 - \dfrac{q-1}{c} x_0\right)}{\log q}} .$$

Caso particular: $c = 12$ y $q = 2$: t es función de x_0. Se tiene:

$$t = -\frac{\log\left(1 - \dfrac{q-1}{c}\, x_0\right)}{\log q} = -\frac{\log\left(1 - \dfrac{x_0}{12}\right)}{\log 2}$$

y t es función creciente de x_0 cuando $0 < x_0 < 12$.

Cuando $x_0 \to 12$, $1 - \dfrac{x_0}{12} \to 0$, $t \to \infty$, y la recta $x_0 = 12$ es una asíntota

Siendo t un elemento de $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ el gráfico es una *curva en escalera*, en el que cada peldaño tiene una longitud igual a la mitad del anterior. Determinemos algunos puntos de la curva en escalera:

x_t	0	6	9	10,5	11,25	11,625	12
t	0	1	2	3	4	5	∞

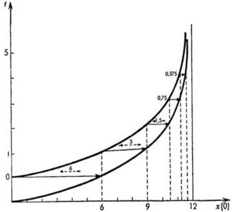


FIG. 30

12. a) α) La operación $f(n) = \dfrac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3}$ aplicada a la sucesión de los números impares $u = (1, 3, 5, \ldots, 2n + 1, \ldots)$ da:

$$f(n) = \frac{2(n-1)+1+2\,n+1+2(n+1)+1}{3}$$

$$\frac{2\,n-2+1+2\,n+1+2\,n+2+1}{3} = \frac{6\,n+3}{3} = 2\,n+1,$$

o sea

$$f(n) = 2\,n + 1 = u_n.$$

β) La misma operación $f(n)$ aplicada a la sucesión de los cuadrados $u = (1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$ da

$$f(n) = \frac{(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2}{3}$$

$$= \frac{n^2 - 2\,n + 1 + n^2 + n^2 + 2\,n + 1}{3} = \frac{3\,n^2 + 2}{3} = n^2 + \frac{2}{3}.$$

b) Una solución particular $u_n = An + B$ de la ecuación

$$\frac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3} = f(n) = 2\,n + 1$$

es tal que:

$$\frac{A(n-1) + B + An + B + A(n+1) + B}{3} =$$

$$= \frac{An - A + B + An + B + An + A + B}{3} = An + B = 2\,n + 1$$

o sea $A = 2$ y $B = 1$ y $u_n = 2\,n + 1$ es una solución particular de la ecuación

$$\frac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3} = f(n) = 2\,n + 1.$$

c) La ecuación $v_n + v_{n-1} + v_{n-2} = 0$ se puede escribir en la forma $v_n = -v_{n-1} - v_{n-2}$. Si se hace $v_0 = a$ y $v_1 = b$, resulta que:

$$\left\{\begin{array}{l} v_2 = -v_1 - v_0 = -a - b = -(a+b), \\ v_3 = -v_2 - v_1 = a + b - b = a = v_0, \\ v_4 = -v_3 - v_2 = -a + a + b = b = v_1, \\ v_5 = -v_4 - v_3 = -v_1 - v_0 = v_2. \end{array}\right.$$

Es inútil el calcular más términos para observar que v_n es una sucesión periódica de período 3, es decir que $v_{n-3k} = v_n$, y se tiene

$$\begin{array}{l} v_{3p} \;\; = v_{3p-3} = \dots = v_3 = v_0 = a, \\ v_{3p+1} = v_{3p-2} = \dots = v_4 = v_1 = b, \\ v_{3p+2} = v_{3p-1} = \dots = v_5 = v_2 = -(a+b). \end{array}$$

d) El conjunto de las funciones u_n para las cuales

$$u_{n-1} + u_n + u_{n+1} = 3\,f(n) = 6\,n + 3 \qquad (E)$$

tiene por elementos: $u_n = 2\,n + 1 + v_n$, ya que:

- por otra parte $2\,n + 1$ es una solución particular de la ecuación (E);
- por otra v_n es una solución general de la ecuación:

$$u_{n-1} + u_n + u_{n+1} = 0.$$

e) La operación $f(n) = \dfrac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3}$ aplicada a la progresión geométrica $u = (1, a, a, \ldots, a^n, \ldots)$ da:

$$f(n) = \frac{a^{n-1} + a^n + a^{n+1}}{3} = a^n \cdot \frac{1}{3}\left[\frac{1}{a} + 1 + a\right] = a^n \cdot \frac{1 + a + a^2}{3\,a},$$

de donde resulta que

$$f(n) = C \cdot a^n, \quad \text{en donde} \quad C = \frac{1 + a + a^2}{3\,a}.$$

Si $a = 2$, es decir $u_n = 2^n$ se obtiene:

$$C = \frac{1 + 2 + 4}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow f(n) = \frac{7}{6} \cdot 2^n.$$

f) Las funciones u_n tales que $f(n) = 2^n$ son de la forma $u_n = C \cdot 2^n$ y deberá obtenerse:

$$2^n = \frac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3} = \frac{C \cdot 2^{n-1} + C \cdot 2^n + C \cdot 2^{n+1}}{3}$$

$$= C \cdot 2^n \frac{1 + 2 + 2^2}{6} = \frac{7}{6} C \cdot 2^n$$

o sea $C = \dfrac{6}{7}$ y

$$\boxed{u_n = \frac{6}{7} 2^n = \frac{6}{7} f(n)}.$$

PROBLEMA III'

1) Calcular el término general u_n y los términos u_3, u_5 y u_7 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) el primer término $u_0 = 2$ y la relación de recurrencia $u_n = 3\,u_{n-1} + 2$;

b) el primer término $u_0 = 5$ y la relación de recurrencia $u_n = -3\,u_{n-1} + 2$;

c) el primer término $u_0 = 3$ y la relación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} + 7$;

d) el primer término $u_0 = -1$ y la relación de recurrencia $u_n = -2\,u_{n-1} - 3$;

e) el primer término $u_0 = 4$ y la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 5$.

2) Calcular el término general u_n y los términos u_3 y u_6 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) el primer término $u_0 = 2$ y la relación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 3^n$;

b) el primer término $u_0 = 3$ y la relación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} - 3^n$;

c) el primer término $u_0 = -1$ y la relación de recurrencia $u_n = 3\,u_{n-1} + 3^n$;

d) el primer término $u_0 = -2$ y la relación de recurrencia $u_n = -2\,u_{n-1} + 5^n$;

e) el primer término $u_0 = 5$ y la relación de recurrencia $u_n = -3\,u_{n-1} + 2^n$.

3) Calcular el término general u_n y los términos u_2 y u_5 de las sucesiones de referencia definidas por:

a) el primer término $u_0 = 3$ y la relación de recurrencia $u_n = 2\,u_{n-1} + 5\,n - 2$;

b) el primer término $u_0 = 2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 3\,u_{n-1} - n^2 + 2\,n + 1;$$

c) el primer término $u_0 = 1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = -u_{n-1} + 2\,n^2 - 5\,n + 8;$$

d) el primer término $u_0 = 5$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 1;$$

e) el primer término $u_0 = -2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 5\,u_{n-1} + n^3 - 3\,n^2 + 3\,n - 1;$$

f) el primer término $u_0 = 1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} - n + 1;$$

g) el primer término $u_0 = 3$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 3\,u_{n-1} + 2\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{4};$$

h) el primer término $u_0 = 1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 2\,u_{n-1} + 5\cos\frac{n\pi}{3};$$

i) el primer término $u_0 = 2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = -u_{n-1} + 2\cos\frac{n\pi}{6} - 5\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6};$$

j) el primer término $u_0 = 5$ y la relación de recurrencia
$$u_n = -2\,u_{n-1} + 3\cos\frac{n\pi}{2} + 2\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3};$$

k) el primer término $u_0 = 3$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 2\,u_{n-1} + 3^n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2};$$

4) Calcular el término general u_n y los términos u_2 y u_7 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) los dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 2;$$

b) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 3\,u_{n-1} - \frac{9}{4}\,u_{n-2} + 1;$$

c) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y la relación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1}\sqrt{2} - u_{n-2} + 3;$$

d) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 4\,u_{n-1} - 3\,u_{n-2} + 5;$$

e) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} + 2.$$

5) Calcular el término general u_n y los términos u_4 y u_5 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 7\,u_{n-1} - 12\,u_{n-2} + 3 \cdot 5^n;$$

b) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 7\,u_{n-1} - 12\,u_{n-2} + 5 \cdot 3^n;$$

c) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 7\,u_{n-1} - 12\,u_{n-2} + 5 \cdot 4^n;$$

d) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 6\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2} + 3 \cdot 5^n;$$

e) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia

$$u_n = 6\,u_{n-1} - 9\,u_{n-2} + 5 \cdot 3^n;$$

f) los dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1}\sqrt{3} - u_{n-2} - 2 \cdot 3^n.$$

6) Calcular el término general u_n y los términos u_5 y u_6 de las sucesiones de recurrencia definidas por:

a) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y la relación de recurrencia

$$u_n = -u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + n^2 - 2\,n + 2;$$

b) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1} + 12\,u_{n-2} + n^2 - 5\,n + 9;$$

c) los dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 6\,u_{n-1} - 5\,u_{n-2} + (n-1)^2;$$

d) los dos primeros términos $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} + 5\,n - 7;$$

e) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 7\,u_{n-1} - 10\,u_{n-2} + 2\,n + 1;$$

f) los dos primeros términos $u_0 = -2$, $u_1 = 3$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 7\,u_{n-1} - 12\,u_{n-2} + 2^{n-1} + (n-1)^2;$$

g) los dos primeros términos $u_0 = 0$, $u_1 = 5$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 3\,u_{n-1} - 2\,u_{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + n - 1;$$

h) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ y la relación de recurrencia
$$u_n = 2\,u_{n-1} - u_{n-2} + {}^3/_2(n-1)\,2^n;$$

i) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} + 2\,u_{n-2} + 2\cos\frac{n\pi}{6};$$

j) los dos primeros términos $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + 5\,\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4};$$

k) los dos primeros términos $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y la relación de recurrencia
$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2} - 3\,\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3};$$

l) los dos primeros términos $u_0 = -1$, $u_1 = 3$ y la relación de recurrencia
$$u_n = -u_{n-1} + 6\,u_{n-2} + 3\,\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - 2\,\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

Soluciones:

1. a) $u_n = 3^{n+1} - 1$, $u_3 = 80$, $u_5 = 728$ y $u_7 = 6\,560$.

b) $u_n = \dfrac{(-3)^{n+2} + 1}{2}$, $u_3 = -121$, $u_5 = -1\,093$ y $u_7 = -9\,841$

c) $u_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 7$, $u_3 = 73$, $u_5 = 313$ y $u_7 = 1\,273$.

d) $u_n = -1$ para todo n y $u_3 = u_5 = u_7 = -1$.

e) $u_n = 4 + 5\,n$, $u_3 = 19$, $u_5 = 29$ y $u_7 = 39$.

2. a) $u_n = \dfrac{3^{n+1} + 1}{2}$, $u_3 = 41$ y $u_6 = 1\,094$.

b) $u_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3^{n+1}$, $u_3 = -33$ y $u_6 = -1\,803$.

c) $u_n = (n-1)\,3^n$, $u_3 = 54$ y $u_6 = 3\,645$.

d) $u_n = \dfrac{-19(-2)^n + 5^{n+1}}{7}$, $u_3 = 111$ y $u_6 = 10\,987$.

e) $u_n = \dfrac{23(-3)^n + 2^{n+1}}{5}$, $u_3 = -121$ y $u_6 = 3\,379$.

3. a) $u_n = 11 \cdot 2^n - 5\,n - 8$, $u_2 = 26$ y $u_5 = 319$.

b) $u_n = \dfrac{5}{2}\,3^n + \dfrac{1}{2}\,n^2 + \dfrac{1}{2}\,n - \dfrac{1}{2}$, $u_2 = 25$ y $u_5 = 622$.

c) $u_n = \dfrac{7}{4}\,(-1)^{n+1} + n^2 - \dfrac{3}{2}\,n + \dfrac{11}{4}$, $u_2 = 2$ y $u_5 = 22$.

d) $u_n = \dfrac{1}{3}\,n^3 + \dfrac{2}{3}\,n + 5$, $u_2 = 9$ y $u_5 = 50$.

e) $u_n = -\dfrac{233}{128}\,5^n - \dfrac{1}{4}\,n^3 - \dfrac{3}{16}\,n^2 - \dfrac{9}{32}\,n - \dfrac{23}{128}$, $u_2 = -49$
y $u_5 = -5\,726$.

f) $u_n = -\dfrac{1}{2}\,n^2 + \dfrac{1}{2}\,n + 1$, $u_2 = 0$ y $u_5 = -9$.

g) $u_n = 3^n \left[\dfrac{132 + 15\sqrt{2}}{41}\right] - \dfrac{9 + 15\sqrt{2}}{41} \cos \dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1 - 12\sqrt{2}}{41} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{4}$,
$u_2 = 29 + 3\sqrt{2}$ y $u_5 = 783 + 89\sqrt{2}$.

h) $u_n = 2^n + \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$, $u_2 = \frac{13}{2}$ y $u_5 = \frac{59}{2}$.

i) $u_n = (-1)^n\left(6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 4\right)\cos\frac{n\pi}{6} + \left(-\frac{9}{2} + \sqrt{3}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$: $u_2 = \frac{11}{2} - \frac{7}{2}\sqrt{3}$ y $u_5 = -12 + 5\sqrt{3}$.

j) $u_n = \frac{154 - 10\sqrt{3}}{35}(-2)^n + \frac{3}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{6}{5}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{7}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{4}{7}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$, $u_2 = 17 - \sqrt{3}$ y $u_5 = -142 + 9\sqrt{3}$.

k) $u_n = \frac{45}{13}2^n + \frac{3^{n+1}}{13}\left[-2\cos\frac{n\pi}{2} + 3\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right]$, $u_2 = 18$ y $u_5 = 279$.

4. *a)* $u_n = -\frac{1}{15}(-2)^n + \frac{2}{5}3^n - \frac{1}{3}$, $u_2 = 3$ y $u_7 = 883$.

b) $u_n = -(3+n)\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4$, $u_2 = -\frac{29}{4}$ y $u_7 = -\frac{10\,679}{64}$.

c) $u_n = \left[-\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}-2}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right] + \frac{3(2+\sqrt{2})}{2}$, $u_2 = 3\sqrt{2} + 2$ y $u_7 = \sqrt{2}$.

d) $u_n = \frac{11}{4}3^n - \frac{5n}{2} - \frac{3}{4}$, $u_2 = 19$ y $u_7 = 5\,996$.

e) $u_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$, $u_2 = 1$ y $u_7 = 36$.

5. *a)* $u_n = -81\cdot 4^n + \frac{91}{2}3^n + \frac{75}{2}5^n$, $u_4 = 6\,387$ y $u_5 = 45\,300$.

b) $u_n = 39\cdot 4^n - (37 + 15n)3^n$, $u_4 = 2\,127$ y $u_5 = 12\,720$.

c) $u_n = (-86 + 20n)4^n + 88\cdot 3^n$, $u_4 = 5\,592$ y $u_5 = 35\,720$.

d) $u_n = -\left(\frac{71}{4} + \frac{77}{6}n\right)3^n + \frac{75}{4}5^n$, $u_4 = 6\,123$ y $u_5 = 38688$.

e) $u_n = \left(\frac{5}{2}n^2 - \frac{17}{6}n + 1\right)3^n$, $u_4 = 2\,403$ y $u_5 = 11\,988$.

f) $u_n = 18\frac{10+3\sqrt{3}}{73}\cos\frac{n\pi}{6} + 2\frac{605+72\sqrt{3}}{73}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} - 18\frac{10+3\sqrt{3}}{73}3^n$, $u_4 = -198 - 52\sqrt{3}$ y $u_5 = -592 - 180\sqrt{3}$.

6. *a*) $u_n = \dfrac{13}{5}\,2^n - \dfrac{21}{160}\,(-3)^n - \dfrac{1}{4}\,n^2 - \dfrac{7}{8}\,n - \dfrac{47}{32}$, $u_3 = 18$ y $u_6 = 55$.

b) $u_n = \dfrac{191}{189}\,4^n + \dfrac{281}{224}\,(-3)^n - \dfrac{1}{12}\,n^2 + \dfrac{5}{72}\,n - \dfrac{229}{864}$,
$u_3 = 30$ y $u_6 = 5\,051$.

c) $u_n = \dfrac{47}{128}\,(5^n - 1) - \dfrac{1}{12}\,n^3 - \dfrac{3}{16}\,n^2 - \dfrac{19}{96}\,n$, $u_3 = 41$ y $u_6 = 5\,711$.

d) $u_n = \dfrac{5}{6}\,n^3 - n^2 - \dfrac{23}{6}\,n + 3$, $u_3 = 5$ y $u_6 = 124$.

e) $u_n = -\dfrac{7}{3}\,2^n + \dfrac{35}{24}\,5^n + \dfrac{1}{2}\,n + \dfrac{15}{8}$, $u_3 = 167$ y $u_6 = 22\,642$.

f) $u_n = -\dfrac{29}{2}\,3^n + \dfrac{290}{27}\,4^n + 2^n + \dfrac{1}{6}\,n^2 + \dfrac{11}{18}\,n + \dfrac{41}{54}$;
$u_3 = 308$ y $u_6 = 33\,498$.

g) $u_n = 2^n(3\,n + 1) - \dfrac{1}{2}\,n^2 - \dfrac{3}{2}\,n - 1$, $u_3 = 70$ y $u_6 = 1\,188$.

h) $u_n = 3(n - 3)\,2^{n+1} + 9\,n + 19$, $u_3 = 46$ y $u_6 = 1\,225$.

i) $u_n = \dfrac{17 - \sqrt{3}}{39}\,2^n + \dfrac{4 + \sqrt{3}}{3}\,(-1)^n + \dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{13}\cos\dfrac{n\pi}{6} +$
$+ \dfrac{7\sqrt{3} - 2}{13}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{6}$, $u_3 = 2$ y $u_6 = 29 - \sqrt{3}$.

j) $u_n = -\dfrac{6 + 5\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{n\pi}{3} - \dfrac{2 + 5\sqrt{2}}{2}\,\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{3}$
$+ \dfrac{5(2 + \sqrt{2})}{2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + \mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{4}\right)$; $u_3 = \dfrac{6 + 5\sqrt{2}}{2}$ y $u_6 = -8 - 5\sqrt{2}$.

k) $u_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,n\right)\cos\dfrac{n\pi}{3} + \left(\sqrt{3} + 1 - \dfrac{3}{2}\,n\right)\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{3}$,
$u_3 = -1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ y $u_6 = 1 + 3\sqrt{3}$.

$$l)\ u_n = -\frac{234 + 130\sqrt{3}}{1\,950}2^n - \frac{611 + 40\sqrt{3}}{650}(-3)^n +$$
$$+ \frac{3}{50}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{21}{50}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{39}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{3}{13}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3};$$
$$u_3 = 24 - \sqrt{3} \quad \text{y} \quad u_6 = -693 - 23\sqrt{3}.$$

CALCULO LINEAL

I. ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO K

A) DEFINICION.

(*) Consideremos un conjunto $\boldsymbol{E}$ cuyos elementos se denotan por letras latinas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ..., y un cuerpo conmutativo $\mathbf{K}$ llamado cuerpo de los escalares, cuyos elementos se expresan por las letras griegas α, β, ...

Se dice que el conjunto $\boldsymbol{E}$ tiene una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los escalares $\mathbf{K}$ si se puede definir:

1. Una ley de *composición interna* en $\boldsymbol{E}$, que se expresa por $\boldsymbol{+}$, que le confiera una estructura de *grupo abeliano* de manera que se tenga, cualesquiera que sean

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{E} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{E}:$$

— $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (conmutatividad),
— $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (asociatividad),
— $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (existencia de un elemento neutro $\boldsymbol{0}$),
— $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (existencia para todo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}$ de un elemento simétrico $(-\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{E}$).

2. Una ley de *composición externa*, llamada *homotecia* o multiplicación por un escalar, que hace corresponder a todo par $(\lambda, \boldsymbol{a})$ formado por un escalar λ de $\mathbf{K}$ y por un elemento $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{E}$ uno de $\boldsymbol{E}$ que se escribe $\lambda\boldsymbol{a}$ y tal que, cualesquiera que sean $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{E}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ y $\mu \in \mathbf{K}$:

— $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$,
— $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$,
— $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) \;= (\lambda\mu)\,\boldsymbol{x}$,
— $1 \cdot \boldsymbol{x} \;= \boldsymbol{x}$.

Se llama *vector* a todo elemento de un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$. De las propiedades de un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ se deduce que si $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{E}$, ..., $\boldsymbol{a}_p \in \mathbf{E}$, toda combinación lineal de esos vectores $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p$ es un vector de $\boldsymbol{E}$.

(*) Para diferenciar los elementos y las operaciones del espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ de los del cuerpo $\mathbf{K}$ se les representa por símbolos itálicos en negritas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{+}$.

B) VARIEDAD LINEAL.

1. Definición.

Consideremos un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ sobre el cuerpo $\mathbf{K}$. Dado un número finito p de vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ de $\boldsymbol{E}$, se llama variedad lineal engendrada por esos p vectores, al conjunto $\boldsymbol{V}$ de todos los vectores que pueden deducirse por combinación lineal

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p \quad \text{con} \quad \lambda_1 \in \mathbf{K}, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}\}$$

La variedad lineal $\boldsymbol{V}$ es un *sub-espacio vectorial* del espacio vectorial $\boldsymbol{E}$.

2. Sistema de generadores de una variedad lineal.

Cuando todo vector $\boldsymbol{v}$ de una variedad $\boldsymbol{V}$ puede ponerse en la forma

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p,$$

se dice que el sistema de vectores $S = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p\}$ es un sistema de generadores de la variedad lineal $\boldsymbol{V}$.

3. Variedades suplementarias (*).

Se dice que dos variedades lineales $\boldsymbol{V}_1$ y $\boldsymbol{V}_2$ del espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ son suplementarias si $\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{0}$.

C) INDEPENDENCIA LINEAL. BASE.

Consideremos un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$. Se dice que los p vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ de $\boldsymbol{E}$ son linealmente independientes, o que forman un *sistema libre*, cuando la relación

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0},$$

con $\lambda_1 \in \mathbf{K}, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Se dice que los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ de $\boldsymbol{E}$ son linealmente dependientes, o que forman un *sistema ligado* cuando existe al menos un conjunto $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de escalares de $\mathbf{K}$ no todos nulos, tal que se verifique

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}.$$

(*) Si $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ designa el conjunto de los elementos $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, en donde $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ se llama a la suma vectorial de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Se llama *base* de una variedad lineal V a *todo sistema libre de generadores* de V, es decir a todo sistema de vectores linealmente independientes que engendra V por combinación lineal. Todo vector de la variedad lineal V puede expresarse *de una y sólo de una manera* como combinación lineal finita de vectores que pertenezcan a la base.

D) ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA.

1. Definición.

Se dice que un espacio vectorial E es de dimensión finita p cuando tiene una base finita $b_1, b_2, \ldots, b_p$, es decir, cuando existe un número finito p de vectores $b_1, b_2, \ldots, b_p$, linealmente independientes, tales que todo elemento de E sea combinación lineal de esos vectores.

2. Teorema de la dimensión.

Si un espacio vectorial E tiene varias bases, éstas tienen igual número de elementos y ese número es igual a la dimensión de E.

3. Teorema de base incompleta.

Si n elementos, en donde $n < p$, son linealmente independientes en el espacio vectorial E, puede siempre sumárseles $(p - n)$ elementos distintos de E de manera que el conjunto de esos p elementos constituya una base de E.

4. El espacio vectorial K^n sobre K.

El producto cartesiano $\underbrace{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \ldots \mathbf{K}}_{n}$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los escalares $\mathbf{K}$; se le representa por la notación K^n. Sus elementos son relaciones formadas por n escalares de $\mathbf{K}$: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Los n vectores linealmente independientes

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1),
\end{aligned}
$$

en donde 0 y 1 son elementos neutros para la adición y la multiplicación en $\mathbf{K}$, constituyen una base de K^n, llamada *base canónica* de K^n; así se obtienen los espacios vectoriales R^n y Q^n. Todo espacio vectorial E sobre $\mathbf{K}$ de dimensión finita n es isomorfa con K^n; el isomorfismo entre E y K^n depende de la base elegida en E.

5. Rango de un sistema de vectores.

Se llama rango del sistema de vectores $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ al número máximo de vectores linealmente independientes que se puede obtener.

E) ESPACIO VECTORIAL EUCLIDIANO.

1. Definición.

Se dice que un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ sobre el cuerpo de los números reales $\boldsymbol{R}$ es un espacio euclidiano, si a cada par de vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es posible hacerles corresponder un escalar real llamado producto escalar (o producto interior) de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y que se escribe $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, el cual satisface a los axiomas siguientes:

— $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
— $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \quad \forall k \in \mathbf{R}$;
— $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$,
— $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0 \quad \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E} - \{\mathbf{0}\}$.

Se llama longitud del vector $\boldsymbol{a}$ al número real positivo $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$; se llama ángulo de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, al ángulo θ comprendido entre 0 y π tal que

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Se dice que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ es nulo.

Si el espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ tiene dimensión finita n y posee una base *ortonormada*, es decir una base formada por n vectores ortogonales y de longitud uno: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{e}_n$, el producto escalar de los vectores

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + a_i \boldsymbol{e}_i + \dots + a_n \boldsymbol{e}_n$$

y

$$\boldsymbol{b} = b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + b_i \boldsymbol{e}_i + \dots + b_n \boldsymbol{e}_n$$

tiene por expresión

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_i b_i + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

La longitud del vector $\boldsymbol{a}$ se expresa por

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

y el coseno del ángulo θ de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tiene por expresión

$$\cos\theta = \frac{\sum^{n} a_i\, b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}.$$

II. APLICACION LINEAL

A) DEFINICION.

Consideremos dos espacios vectoriales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbf{K}$. Se dice que la aplicación f de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{F}$ es lineal si cualesquiera que sean $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, $\mathbf{y} \in \boldsymbol{E}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ y $\mu \in \mathbf{K}$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x} + \mathbf{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\mathbf{y}) \\ \text{y} \\ f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \quad \text{o bien} \quad [f(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\mathbf{y})].$$

El conjunto $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ de las aplicaciones lineales de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{F}$ que goza de la adición y de la multiplicación por un escalar de $\mathbf{K}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los escalares $\mathbf{K}$.

Recuérdese que la suma de dos funciones f y g es la función $(f + g)$ definida por $(f + g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Análogamente la multiplicación de una función f por un escalar λ es la función λf definida por

$$(\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}.$$

B) ISOMORFISMO.

Consideremos dos espacios vectoriales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ sobre un mismo cuerpo $\boldsymbol{K}$. Se llama isomorfismo de $\boldsymbol{E}$ sobre $\boldsymbol{F}$ a toda aplicación *f lineal y biyectiva* de $\boldsymbol{E}$ sobre $\boldsymbol{F}$. Si existe un tal isomorfismo, los espacios vectoriales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ se denominan *isomorfos*.

C) FORMA LINEAL.

1. Definición.

Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Se llama forma lineal sobre $\boldsymbol{E}$, o covector de $\boldsymbol{E}$, a toda aplicación lineal de $\boldsymbol{E}$ en $\mathbf{K}$ considerada como espacio vectorial sobre sí mismo.

2. Espacio dual $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

El espacio vectorial $\mathcal{L}(E, K)$ de las formas lineales, que se suele expresar por E^*, se denomina espacio dual de E.

3. Producto escalar.

Si x es un vector de E e y un covector de E (es decir una forma lineal sobre E o un elemento de E^*) se dice que el escalar $y(x)$ es el producto escalar del vector x de E por el covector y y se le representa indiferentemente por las notaciones $y(x)$ o $< x, y >$ o $x \cdot y$.

Se dice que x e y son *ortogonales* si su producto escalar $x \cdot y = 0$. Si el espacio vectorial E es de dimensión n, E^* es también un espacio vectorial de dimensión n y el producto escalar del vector

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n)$$

y del covector

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

es

$$x \cdot y = x^1 y_1 + x^2 y_2 + \ldots + x^i y_i + \ldots + x^n y_n = \sum_{i=1}^{n} x^i y_i.$$

III. MATRICES

A) DEFINICION

Una matriz es un *cuadro rectangular finito* de elementos que pertenecen a un cuerpo escalar $\mathbf{K}$. Se representa por

$$M_{(m,n)} = \begin{pmatrix} r_1^1 & \ldots & r_1^j & \ldots & r_1^n \\ \vdots & & & & \\ r_i^1 & \ldots & r_i^j & \ldots & r_i^n \\ \vdots & & & & \\ r_m^1 & \ldots & r_m^j & \ldots & r_m^n \end{pmatrix} = (r_i^j)$$

en una matriz de formato (m, n) es decir, en una matriz que tiene m filas n columnas, el elemento r_i^j pertenece a la fila i y a la *columna* j.

B) FORMATOS PARTICULARES.

Si $m = 1$ y $n > 1$, la matriz de formato $(1, n)$ se llama *vector-fila*. Si $m > 1$ y $n = 1$, la matriz de formato $(m, 1)$ se denomina *vector-columna*.

Se dice que una matriz es *horizontal* si $m < n$ y *vertical* si $m > n$. Si $m = n$ la matriz de formato (m, n) se dice *cuadrada* de orden m.

C) MATRIZ DE UNA APLICACION LINEAL.

Sean $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$. Si $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ es una base de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ una base de $\boldsymbol{F}$, a cada aplicación lineal f de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{F}$ corresponde la matriz $\boldsymbol{M} = (\alpha_i^j)$, en donde $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^j, \ldots, \alpha_i^n$ son las componentes del vector $f(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{M}$ con relación a la base $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Esta matriz $\boldsymbol{M}$ se denomina matriz de la aplicación lineal f.

D) RANGO DE UNA MATRIZ.

Una matriz $\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_i^j)$ se puede subdividir bien en m vectores filas $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ de dimensión n, o bien en n vectores columnas $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ de dimensión m. Los dos sistemas de vectores $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ y $\{\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n\}$ tienen igual rango r [Ver I. D. 5.]. Ese número r, es por definición, el *rango* de la matriz $\boldsymbol{A}$.

E) OPERACIONES SOBRE LAS MATRICES.

1. Combinación lineal de dos matrices de igual formato.

Dadas dos matrices $\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_i^j)$ y $\boldsymbol{B}_{(m,n)} = (b_i^j)$ y dos escalares λ y μ, que pertenecen a un cuerpo $\boldsymbol{K}$ se designa por $\boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{B}$ a una matriz de formato (m, n) cuyo término general es

$$c_i^j = \lambda a_i^j + \mu b_i^j.$$

El conjunto de las matrices de formato (m, n) dado, forman una especie vectorial de dimensión mn sobre el cuerpo $\mathbf{K}$. Se llama *matriz nula* $\boldsymbol{O}_{(m,n)}$ a la matriz en la que todos sus términos son nulos.

2. Producto de dos matrices.

Si el número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_i^j)$ es igual al número de líneas de la matriz $\boldsymbol{B}_{(n,p)} = (b_j^k)$, se llama producto $A \cdot B$ de las dos matrices A y B, *escritas en este orden*, a la matriz $C_{(m,p)} = (c_i^k)$, en donde

$$c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j\, b_j^k \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{y} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

3. Matrices unidad.

Se llaman matrices unidad a las matrices cuadradas en las que todos los elementos son nulos, a excepción de los elementos de la diagonal principal, que son iguales a 1. Existen tantas matrices unidad $I_{(n,n)}$ o I_n como formatos cuadrados (n, n); toda matriz unidad es neutra con respecto a la multiplicación matricial, es decir que

$$I_n \cdot A_{(n,m)} = A_{(n,m)} \cdot I_m = A_{(n,m)}.$$

4. Matrices inversas.

Si $A_{(n,m)} \cdot B_{(m,n)} = I_n$, se dice que:

$$\begin{cases} \text{la matriz } A \text{ es una matriz inversa a la izquierda de } B, \\ \text{la matriz } B \text{ es una matriz inversa a la derecha de } A. \end{cases}$$

5. Transposición.

Se dice que la matriz $A'_{(n,m)} = (a_i'^j)$ es la transpuesta de la matriz

$A_{(m,n)} = (a_i^j)$ si $a_i'^j = a_j^i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

La transpuesta del producto matricial $A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)}$ es $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$.

Dos matrices transpuestas tienen ambas el mismo rango.

IV. MATRICES CUADRADAS

A) DEFINICION.

Se llama matriz cuadrada de orden n a una matriz $A_{(n,n)}$ cuyo número de filas es igual al de columnas. El conjunto de los elementos a_i^i se llama diagonal principal. La suma

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i^i$$

es la *traza* de la matriz A

B) MATRICES PARTICULARES.

1. Matriz diagonal.

Una matriz diagonal $D = (d_i^j)$ es una matriz cuadrada en la que sólo los términos de la diagonal principal son distintos de cero, es decir que $d_i^j = 0$ si $i \neq j$.

Una *matriz escalar* $S = (s_i^j)$ es una matriz diagonal en la que los términos no nulos, s_i^i, son iguales a un mismo número s de tal manera que $S = sI$.

2. Matriz triangular.

Una matriz cuadrada se dice es triangular superior (inferior) si todos los términos situados por debajo (por encima) de la diagonal principal son nulos, es decir si $a_i^j = 0$ cuando $i > j$ (cuando $i < j$).

3. Matriz simétrica.

Se dice que la matriz cuadrada $A = (a_i^j)$ es simétrica si es igual a su transpuesta; entonces se tiene $A' = A$ o $a_i^j = a_j^i$ para todo par (i, j). Una matriz A es hemisimétrica si $A' = -A$ o $a_i^j = -a_j^i$ para todo par (i, j).

4. Matriz regular.

Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_i^j)$ es regular o *inversible* si existe una matriz cuadrada de igual orden B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Se suele expresar por A^{-1} a la matriz inversa de A. Cuando una matriz no es regular se dice que es *singular*.

5. Matriz ortogonal.

Se llama matriz ortogonal a una matriz A tal que $A' \cdot A = I$, es decir una matriz que tiene por matriz inversa su transpuesta, $A^{-1} = A'$.

6. Matriz de Markov.

Se llama matriz de Markov a una matriz cuadrada $M_{(n,n)} = (m_i^j)$, con elementos positivos o nulos, en la que la suma de los elementos de cada columna es igual a 1, es decir $m_i^j \geqslant 0$ para todo par (i, j) y

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^j = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

C) REDUCCION CANONICA DE LAS MATRICES.

1. Matrices equivalentes.

Dos matrices $A_{(m,n)}$ y $B_{(m,n)}$ de igual formato (m, n) se dice son equivalentes si, y sólo si existen dos matrices regulares $P_{(m,m)}$ y $Q_{(n,n)}$ tales que: $B = P \cdot A \cdot Q$.

Dos matrices de igual formato son equivalentes si, y solamente si tienen el mismo rango.

2. Reducida canónica de una matriz.

Toda matriz $A_{(m,n)}$ de rango r es equivalente a la matriz

$$R_{(m,n)} = \begin{pmatrix} I_{(r,r)} & O_{(r,k)} \\ O_{(h,r)} & O_{(h,k)} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} k = n - r, \\ h = m - r. \end{cases}$$

La matriz R es la reducida canónica de la matriz A.

3. Matrices semejantes.

Dos matrices cuadradas, de orden n, A y B se dice son semejantes si, y solamente si existe una matriz cuadrada regular P de orden n, tal que

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1}.$$

D) DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

1. Definición.

Dado el espacio vectorial $\mathfrak{M}$ de las matrices cuadradas

$$A_{(n,n)} = (a^1, \ldots, a^i, \ldots, a^n)$$

sobre el cuerpo de los escalares $\mathbf{K}$ (siendo los vectores columnas a^i de dimensión n), existe una aplicación f y una sola que asocia a la matriz $A = (a^1, \ldots, a^i, \ldots, a^n)$ el escalar $f(A) = f(a^1, \ldots, a^i, \ldots, a^n)$ y tal que:

a) f es lineal con relación a cada vector columna

$$f(a^1, \ldots, \alpha a'^i + \beta a''^i, \ldots, a^n) = \alpha f(a^1, \ldots, a'^i, \ldots, a^n) + \beta f(a^1, \ldots, a''^i, \ldots, a^n) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\};$$

como hay n vectores columna se dice que la aplicación es n-lineal;

b) f es alternada, es decir

$$f(a^1, \ldots, a^j, \ldots, a^i, \ldots, a^n) = -f(a^1, \ldots, a^i, \ldots, a^j, \ldots, a^n)$$

c) $f(I) = f(e^1, \ldots, e^i, \ldots, e^n) = 1$, siendo I la matriz unidad.

El escalar $f(A) = f(a^1, \ldots, a^i, \ldots, a^n)$ se llama determinante de la matriz A y se expresa por det A o $|A|$ o $\Delta(A)$.

2. Menor y cofactor de un elemento a_i^j de una matriz cuadrada.

Consideremos el elemento a_i^j de una matriz cuadrada $A_{(n,n)} = (a_i^j)$. Se llama menor de a_i^j al determinante Δ_i^j de la matriz cuadrada de formato $(n-1,\ n-1)$ obtenido suprimiendo en la matriz $A_{(n,n)}$ la fila i y la columna j. Se llama cofactor de a_i^j al número

$$A_i^j = (-1)^{i+j}\,\Delta_i^j.$$

3. Desarrollo del determinante de una matriz cuadrada $A_{(n,n)} = (a_i^j)$.

Se llama desarrollo del determinante de la matriz $A_{(n,n)} = (a_i^j)$ según la fila i, a la expresión

$$a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \dots + a_i^j A_i^j + \dots + a_i^n A_i^n = \sum_{j=1}^{n} a_i^j A_i^j.$$

De igual forma, se llama desarrollo del determinante de la matriz $A_{(n,n)} = (a_i^j)$ según la columna j, a la expresión

$$a_1^j A_1^j + a_2^j A_2^j + \dots + a_i^j A_i^j + \dots + a_n^j A_n^j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j A_i^j.$$

Se demuestra que

$$\det A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_i^j A_i^j & \text{para todo} \quad i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^j A_i^j & \text{para todo} \quad j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}; \end{cases}$$

es decir que para calcular el determinante de una matriz cuadrada A basta desarrollar según una fila o una columna cualquiera.

4. Matriz adjunta. Matriz inversa.

Se llama matriz adjunta de una matriz cuadrada $A_{(n,n)} = (a_i^j)$ la matriz $\widetilde{A}_{(n,n)} = (A_i^j)'$ transpuesta de la matriz de los cofactores. Si el determinante de una matriz A no es nulo, esta matriz es regular y tiene por inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\widetilde{A}.$$

5. Propiedades de los determinantes.

- Si todos los elementos de una fila (o de una columna) son nulos, el determinante es nulo.
- Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un mismo número, el determinante se multiplica por ese número.
- Si se cambian dos filas (o dos columnas) de un determinante, queda sustituido por su opuesto.
- Un determinante que tenga dos filas (o dos columnas) idénticas es nulo. Un determinante que tenga dos filas (o dos columnas) proporcionales es nulo.
- El valor de un determinante no se modifica sumando a una fila (columna) una combinación lineal de las otras líneas (columnas).
- Si las filas (columnas) de un determinante son las componentes de vectores linealmente independientes, ese determinante no es nulo.
- Si las filas (columnas) de un determinante son las componentes de vectores linealmente independientes, ese determinante es nulo. Se llama *rango* de ese sistema de vectores al mayor de los órdenes de los menores diferentes de cero.

E) VECTOR PROPIO DE UNA MATRIZ CUADRADA M.

Se dice que un vector $x_{(n,1)}$ es un vector *propio* de la matriz $M_{(n,n)}$ si existe un escalar λ tal que $Mx = \lambda x$. Al escalar λ se llama valor *propio* (o valor *característico*, o valor *espectral*) de la matriz M y se dice que x es el vector propio asociado al valor propio λ.

F) ECUACION CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ CUADRADA M.

Cualquiera que sea el vector $x_{(n,1)}$ no nulo, la igualdad $Mx = \lambda x = \lambda I x$ o $(M - \lambda I)\,x = 0$ no se puede realizar más que si el determinante de la matriz cuadrada $M - \lambda I$ es nulo; det $(M - \lambda I) = 0$ es una ecuación de grado n en λ que se llama *ecuación característica* de la matriz M. Sus raíces son los valores propios de la matriz M.

PROBLEMA IV

1) Se considera el conjunto $\boldsymbol{R}[x]$ de los polinomios de la variable x, con coeficientes reales. Se representa un polinomio $A(x) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n x^n$ por $A(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, es decir por una serie de números reales tal que a partir de un cierto índice, los elementos de la sucesión sean todos iguales al elemento neutro 0 de la adición en **R**. El mayor índice n tal que $a_n \neq 0$ es el grado del polinomio $A(x)$.

a) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{R}[x]$ que goza de la adición y de la multiplicación por un número real es un espacio vectorial sobre R.

b) ¿Cuál es la dimensión de ese espacio vectorial?

c) Se considera la aplicación que hace corresponder al polinomio $A(x)$ su derivada $A'(x)$. Demostrar que esta aplicación es una aplicación lineal de $\boldsymbol{R}[x]$ en sí mismo. ¿Esta aplicación es biyectiva?

2) Se consideran los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 2)$; $\boldsymbol{b} = (2, 3)$ y $\boldsymbol{c} = (3, 4)$ del espacio euclidiano $\mathbf{R}^2$.

a) Demostrar que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes dos a dos.

b) Calcular los productos escalares $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}'$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}'$ $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}'$, en donde $\boldsymbol{x}'$ designa el vector transpuesto de $\boldsymbol{x}$.

c) Calcular la longitud de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$; deducir los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{c}_1$ homotéticos respectivamente de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ de longitud *unidad*.

d) Determinar las componentes del vector $\boldsymbol{c}$ cuando se toman los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{b}_1$ como base de $\mathbf{R}^2$.

3) Se consideran los vectores $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$; $\boldsymbol{b} = (2, 4, 1)$ y $\boldsymbol{c} = (3, -1, -2)$ del espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$.

a) Verificar que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son ortogonales dos a dos y linealmente independientes.

b) Calcular los productos escalares $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}'$ y $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}'$. Deducir los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{c}_1$ homotéticos respectivamente con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ y de longitud *unidad*.

c) Determinar las componentes del vector $\boldsymbol{d} = (1, 0, 0)$ cuando se toman los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{c}_1$ por base de $\mathbf{R}^3$.

4) *a*) Consideremos el vector fila $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$. Demostrar que la aplicación que asocia al vector $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ el escalar $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}'$ es lineal.

b) Consideremos el vector columna $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Demostrar que la aplicación asocia al vector $\boldsymbol{a} = (x,\ y\ z)$ el escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}'$ es lineal.

c) Enunciar la propiedad que confiere al producto escalar esos dos resultados.

5) Consideremos el vector $\boldsymbol{u} = (1, -3, 2)$ y las matrices

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{M}$; $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{S}$; $\boldsymbol{M}' \cdot \boldsymbol{u}'$; $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{u}'$; $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M}'$; $\boldsymbol{M}' \cdot \boldsymbol{M}$; $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{M}' \cdot \boldsymbol{S}$.

b) Demostrar que la aplicación que asocia al vector $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$ el vector $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}$ es lineal.

c) Demostrar que la aplicación que asocia al vector $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix}$ el vector $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{a}'$ es lineal.

6) *a*) Demostrar que los vectores columnas $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^j, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ obtenidos al dividir una matriz $\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_i^j)$, son independientes si

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} \cdot \boldsymbol{X}_{(n,1)} = \boldsymbol{O}_{(n,1)} \Rightarrow \boldsymbol{X}_{(n,1)} = \boldsymbol{O}_{(n,1)}.$$

Entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ es una matriz con columnas independientes.

b) Demostrar que a partir de toda matriz $\boldsymbol{A}$ con columnas independientes, se puede formar otra igualmente con columnas independientes, al suprimir columnas o añadiendo nuevas filas.

c) Demostrar que toda matriz cuadrada regular tiene columnas independientes.

d) Demostrar que una matriz horizontal $\boldsymbol{L}$ tiene necesariamente columnas dependientes (se admitirá que toda matriz cuadrada con columnas independientes es inversible) y que no tiene inversa a la izquierda.

7) Se considera el conjunto $\mathfrak{M}$ de las matrices cuadradas de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a,\ b \in \mathbf{R}.$$

a) Demostrar que toda matriz A no nula de $\mathfrak{M}$ es regular. Determinar su matriz inversa A^{-1} y comprobar que pertenece, como A, al conjunto $\mathfrak{M}$.

b) Deducir que la adición y la multiplicación matriciales originan en el conjunto $\mathfrak{M}$ una estructura de cuerpo conmutativo.

c) Demostrar que toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ del conjunto $\mathfrak{M}$ se puede representar por el número complejo $a + b\,\mathrm{i}$, en donde $\mathrm{i}^2 = -1$.

8) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el producto $A \cdot B$; ¿puede decirse sin realizar un nuevo cálculo cuál será el producto de $B \cdot A$?

b) Calcular A^2 y B^2. Deducir la serie de potencias de A y de B.

c) Demostrar que se pueden formar doce matrices distintas (análogas a las anteriores) de formato 2×2, tomando para los cuatro elementos: 0 y -1, una vez cada uno, y el número 1 dos veces.

Determinar todas los posibles matrices indicando las matrices inversas una de otra. ¿Cuáles son de entre dichas matrices aquellas cuyo cuadrado es igual a la matriz unidad?

9) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2 y A^3. Deducir A^n.

b) Sea $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden dos. Calcular la matriz J tal que $M = J + I$. Deducir M^n.

c) Sea $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz K tal que $N + I = K$. Deducir N^n.

10) Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular B^2 y comprobar que B^2 y B son homotéticas. Calcular la relación de homotecia.

b) Deducir de *a*) las matrices B^3 y B^n para n entero positivo.

c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcular J tal que $M = J + I$. Deducir M^n.

d) Calcular la matriz $Bx + I$ y después $(Bx + I)^n$, en donde $x \in \mathbf{R}$.

11) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden tres.

a) Calcular la matriz J tal que $M = J + I$.

b) Calcular J^2, J^3 y deducir J^n. Calcular M^n.

12) Consideremos la matriz de Markov $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Calcular M^2 y M^3. ¿Son también matrices de Markov?

b) Verificar que M^n es una matriz de Markov.

c) Calcular la matriz M^{-1} inversa de la matriz M. ¿Es también matriz de Markov? ¿Qué puede decirse de la matriz M^{-n}?

d) Dada la matriz de Markov $N = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, calcular $M \cdot N$.

13) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el producto $A \cdot A'$. Deducir la propiedad que tiene la matriz A.

b) Deducir de a) que los vectores filas $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ forman una base ortonormada de $\mathbf{R}^2$.

14) Calcular el determinante, la matriz adjunta y la matriz inversa, cuando exista, de las matrices

a) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

15) Se considera el sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = -5 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

a) Expresarlo en forma matricial $M \cdot X = B$.

b) Determinar la matriz inversa M^{-1} de la matriz M multiplicando simultáneamente M e I por matrices regulares elegidas cuidadosamente. Deducir la solución del sistema.

e) Calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{M}$ y hallar los resultados de *b*) con la ayuda del método por los determinantes.

d) Calcular la matriz adjunta $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ y la matriz inversa $\boldsymbol{M}^{-1}$ de la matriz $\boldsymbol{M}$.

16) *a*) Calcular el determinante de las matrices

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -4\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

b) Deducir el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Soluciones:

1. Este ejercicio teórico tiene por objeto el hacer que ellector compruebe si ha asimilado las nociones importantes de espacio vectorial y de aplicación lineal.

a) Consideremos dos polinomios

$$\boldsymbol{A}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$$
$$\text{y} \quad \boldsymbol{B}(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=(b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_m,0,0,\ldots).$$

Se define sobre el conjunto de los polinomios una operación interna, *la adición,* haciendo

$$\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{B}(x)=(a_0+b_0,a_1+b_1,\ldots,a_i+b_i,\ldots,a_k+b_k,0,0,\ldots)$$

en donde $k=\max(m,n)$. La adición de los polinomios de $\boldsymbol{R}[x]$ es una operación:

— *conmutativa* ya que $a_i+b_i=b_i+a_i \quad \forall a_i\in\mathbf{R}$ y $\forall b_i\in\mathbf{R}$;
— *asociativa* ya que $(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$ $\forall a_i\in\mathbf{R}$, $\forall b_i\in\mathbf{R}$ y $\forall c_i\in\mathbf{R}$;
— que tiene un *elemento neutro,* el polinomio $\boldsymbol{O}(x)=(0,0,\ldots,0,\ldots)$
— tal que cada polinomio $\boldsymbol{A}(x)=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$ tiene un *opuesto,* el polinomio $-\boldsymbol{A}(x)=(-a_0,-a_1,\ldots,-a_n,0,0,\ldots)$.

Para la adición, el conjunto de los polinomios constituye un grupo abeliano. Dado un polinomio $A(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ y un número real λ, se define la multiplicación de un polinomio $A(x)$ por un escalar λ poniendo

$$\lambda A(x) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n, 0, 0, \ldots)$$

Evidentemente, se tiene si $\lambda \in \mathbf{R}$ y $\mu \in \mathbf{R}$,

$$\lambda[A(x) + B(x)] = \lambda A(x) + \lambda B(x)$$
$$(\lambda + \mu) A(x) = \lambda A(x) + \mu A(x)$$
$$\lambda(\mu A(x)) = (\lambda\mu) A(x)$$
$$1 \cdot A(x) = A(x)$$

La adición de los polinomios y la multiplicación por un número real hacen del conjunto de los polinomios un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los coeficientes.

b) Si $e_n = x^n = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ es el polinomio en el que todos los coeficientes son nulos salvo los de índice n, que valen 1, escribiéndose todo polinomio $A(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ de grado n en la forma

$$A(x) = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n.$$

Los vectores $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ constituyen una base del espacio vectorial de los polinomios. Como n puede ser tan grande como se quiera, el número de los elementos de la base es infinito y el espacio vectorial es de *dimensión infinita*.

c) Ya que la derivada del polinomio

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

es el polinomio

$$A'(x) = a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} = (a_1, 2 a_2, \ldots, n a_n, 0, 0, \ldots),$$

la derivada de

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0,\ a_1 + b_1, \ldots, a_k + b_k, 0, 0, \ldots),$$

en donde $k = \max(m, n)$, es

$$\begin{aligned}[A(x) + B(x)]' &= (a_1 + b_1, 2(a_2 + b_2), \ldots, k(a_k + b_k), 0, 0, \ldots)\\ &= A'(x) + B'(x).\end{aligned}$$

Análogamente, la derivada de $\lambda A(x) = (\lambda a_0,\ \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n, 0, 0, \ldots)$ es

$$[\lambda A(x)]' = (\lambda a_1, 2\lambda a_2, \ldots, n\lambda a_n, 0, 0, \ldots) = \lambda A'(x).$$

La aplicación $A(x) \multimap\!\!\!\to A'(x)$ es pues lineal de $\boldsymbol{R}[x]$ en sí misma. Esta aplicación *no es biyectiva,* puesto que dos polinomios $A(x)$ y $A(x) + c$, que difieren en la constante c, tienen la misma derivada $A'(x)$.

2. *a*) Demostremos que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes dos a dos. En efecto.

$$\begin{aligned}\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = (0, 0) &\Rightarrow \lambda(1, 2) + \mu(2, 3) = (0, 0)\\ &\Rightarrow (\lambda + 2\mu, 2\lambda + 3\mu) = (0, 0)\end{aligned}$$

y λ y μ verifican el sistema $\left\{\begin{array}{l}\lambda + 2\mu = 0\\ 2\lambda + 3\mu = 0\end{array}\right.$, que tiene una solución *única* $\lambda = 0$ y $\mu = 0$; $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son linealmente independientes.

Análogamente

$$\begin{aligned}\lambda' \boldsymbol{a} + \mu' \boldsymbol{c} = (0, 0) &\Rightarrow \lambda'(1, 2) + \mu'(3, 4) = (0, 0)\\ &\Rightarrow (\lambda' + 3\mu', 2\lambda' + 4\mu') = (0, 0)\end{aligned}$$

y λ' y μ' verifican el sistema $\left\{\begin{array}{l}\lambda' + 3\mu' = 0\\ 2\lambda' + 4\mu' = 0\end{array}\right.$, que tiene una solución *única* $\lambda' = 0$ y $\mu' = 0$; $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes.

Por último

$$\lambda'' \boldsymbol{b} + \mu'' \boldsymbol{c} = (0, 0) \Rightarrow \lambda''(2, 3) + \mu''(3, 4) = (0, 0)$$

y λ'' y μ'' verifian el sistema $\left\{\begin{array}{l}2\lambda'' + 3\mu'' = 0\\ 3\lambda'' + 4\mu'' = 0\end{array}\right.$, que tiene una solución *única* $\lambda'' = 0$ y $\mu'' = 0$; $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes.

b) Se tiene

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}' = (1,\ 2)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

y

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}' = (2,\ 3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8.$$

Análogamente

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = (1,\ 2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5,$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}' = (2,\ 3)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

y

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}' = (3,\ 4)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25.$$

c) Si $|x| = \sqrt{x \cdot x'}$ designa la longitud del vector x, se tiene:
$|a| = \sqrt{a \cdot a'} = \sqrt{5}$, $|b| = \sqrt{b \cdot b'} = \sqrt{13}$ y $|c| = \sqrt{c \cdot c'} = \sqrt{25} = 5$.

El vector x_1 homotético con x (y de igual sentido que él) de longitud *uno* al ser de la forma $x_1 = \lambda x$ con $|x_1| = |\lambda x| = 1$ se tiene $\lambda = \dfrac{1}{|x|}$, y

$x_1 = \dfrac{x}{|x|}$; de ello resulta que

$$a_1 = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),$$

$$b_1 = \frac{b}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

y

$$c_1 = \frac{c}{|c|} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

d) Las componentes α y β del vector $c = \alpha a_1 + \beta b_1$ con respecto a la base a_1 y b_1 de $\mathbf{R}^2$ verifican las ecuaciones

$$(3, 4) = \alpha\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \beta\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

en donde el sistema

$$\begin{cases} 3 = \alpha\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{2\beta\sqrt{13}}{13} \\ 4 = \dfrac{2\alpha\sqrt{5}}{5} + \dfrac{3\beta\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

tiene una solución $\alpha = -\sqrt{5}$ y $\beta = 2\sqrt{13}$; se tiene entonces

$$c = -\sqrt{5}\,a_1 + \frac{2\sqrt{13}}{13}\,b_1.$$

3. a) Ya que

$$a \cdot b' = (1, -1, 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 0,$$

$$b \cdot c' = (2, 4, 1)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 4(-1) + 1(-2) = 0$$

$$\text{y} \qquad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}' = (3,-1,-2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 3\cdot 1 - 1(-1) - 2\cdot 2 = 0,$$

los vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son ortogonales dos a dos. Demostremos que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes, es decir que $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ implica $\lambda=\mu=\nu=0$. Luego,

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=(0,0,0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda(1,-1,2)+\mu(2,4,1)+\nu(3,-1,-2)=(0,0,0)$$

y λ, μ y ν verifican el sistema $\begin{cases}\lambda+2\mu+3\nu=0\\-\lambda+4\mu-\nu=0\\2\lambda+\mu-2\nu=0\end{cases}$

que tiene una solución *única* $\lambda=\mu=\nu=0$; los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son, pues, linealmente independientes.

b) Se tiene:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' = (1,-1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 1(-1) + 2\cdot 2 = 6,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'} = \sqrt{6} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right);$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}' = (2,4,1)\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 4\cdot 4 + 1\cdot 1 = 21,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'} = \sqrt{21} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \left(\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right);$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}' = (3,-1,-2)\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} = 3\cdot 3 - 1(-1) - 2(-2) = 14,$$

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}'} = \sqrt{14} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = \left(\frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}\right).$$

c) Las componentes α, β y γ del vector $\boldsymbol{d}=(1,0,0)$ con relación a la base *ortonormal* (formada por vectores unidad ortogonales dos a dos) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{c}_1$ verifican las ecuaciones

$$(1,0,0) = \alpha\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \beta\left(\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right) +$$
$$+ \gamma\left(\frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}\right)$$

y α, β, γ verifican el sistema

$$\begin{cases} 1 = \alpha \dfrac{\sqrt{6}}{6} + 2\beta \dfrac{\sqrt{21}}{21} + 3\gamma \dfrac{\sqrt{14}}{14} \\ 0 = -\alpha \dfrac{\sqrt{6}}{6} + 4\beta \dfrac{\sqrt{21}}{21} - \gamma \dfrac{\sqrt{14}}{14} \\ 0 = \alpha \dfrac{\sqrt{6}}{3} + \beta \dfrac{\sqrt{21}}{21} - \gamma \dfrac{\sqrt{14}}{7} \end{cases}$$

que tiene una solución

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{21}}{21} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{3\sqrt{14}}{14};$$

luego, se tiene

$$\boldsymbol{d} = \frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{a}_1 + \frac{2\sqrt{21}}{21}\boldsymbol{b}_1 + \frac{3\sqrt{14}}{14}\boldsymbol{c}_1.$$

4. *a*) La aplicación

$$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \multimap \mathrm{f}(\boldsymbol{a}') = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}' = (1, 2, -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - z$$

es lineal, pues

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2) &= (1, 2, -1)\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}'_2 = \mathrm{f}(\boldsymbol{a}'_1) + \mathrm{f}(\boldsymbol{a}'_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\lambda\boldsymbol{a}') = \boldsymbol{v}(\lambda\boldsymbol{a}') &= (1, 2, -1)\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \\ &= \lambda x + 2\lambda y - \lambda z = \lambda(x + 2y - z) = \lambda\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}' = \lambda\mathrm{f}(\boldsymbol{a}'). \end{aligned}$$

b) La aplicación

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z) \multimap g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}' = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x + 2y - z$$

es linel, puesto que

$$g(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2) \cdot v' = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$$

$$= (x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2)$$

$$= a_1 v' + a_2 v' = g(a_1) + g(a_2)$$

y

$$g(\lambda a) = (\lambda a)\, v' = (\lambda x, \lambda y\ , \lambda z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda x + 2\lambda y - \lambda z = \lambda(x + 2y - z) = \lambda a \cdot v' = \lambda g(a).$$

c) Ya que las aplicaciones $a' \multimap v \cdot a'$ y $a \multimap a \cdot v'$ son lineares, se dice que el producto escalar es una *aplicación bilineal*.

5. *a*)

$$u_{(1,3)} \cdot M_{(3,4)} = (1, -3, 2) \begin{pmatrix} 1 & : & 2 & : & 4 & : & -1 \\ 2 & : & 0 & : & 1 & : & 3 \\ -3 & : & 1 & : & 0 & : & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2(-3),\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1,\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1,$$

$$1(-1) - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = (-11, 4, 1, -6);$$

$$u_{(1,3)} \cdot S_{(3,3)} = (1, -3, 2) \begin{pmatrix} 1 & : & 4 & : & 5 \\ 4 & : & 2 & : & 6 \\ 5 & : & 6 & : & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5,\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6,\ 1 \cdot 5 - 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3)$$

$$= (-1, 10, -7);$$

$$M'_{(4,3)} \cdot u'_{(3,1)} = (u \cdot M)' = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad S_{(3,3)} \cdot u'_{(3,1)} = (u \cdot S)' = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{pues} \quad S' = S;$$

$$M_{(3,4)} \cdot M'_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 3 & -3 \\ 3 & 14 & 0 \\ -3 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

y

$$M'_{(4,3)} \cdot M_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 17 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 14 \end{pmatrix};$$

las matries $M \cdot M'$ y $M' \cdot M$ son simétricas.

$$S_{(3,3)} \cdot M_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 8 & 21 \\ -10 & 14 & 18 & 14 \\ 8 & 13 & 26 & 19 \end{pmatrix}$$

y

$$M' \cdot S = (S \cdot M)' = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 13 \\ 8 & 18 & 26 \\ 21 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

b) La aplicación

$$v = (x, y, z) \multimap f(v) = v \cdot M = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es *lineal*, pues

$$
\begin{aligned}
f(v_1 + v_2) &= \\
&= (v_1 + v_2)\,M = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\,M \\
&= [x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2),\ 2(x_1 + x_2) + \\
&\quad + z_1 + z_2,\ 4(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2),\ -(x_1 + x_2) + \\
&\quad + 3(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)] \\
&= [x_1 + 2y_1 - 3z_1,\ 2x_1 + z_1,\ 4x_1 + y_1,\ -x_1 + 3y_1 + 2z_1] + \\
&\quad + [x_2 + 2y_2 - 3z_2,\ 2x_2 + z_2,\ 4x_2 + y_2,\ -x_2 + 3y_2 + 2z_2] \\
&= v_1 \cdot M + v_2 M = f(v_1) + f(v_2)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
f(\lambda v) &= (\lambda v)\,M = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\,M \\
&= [\lambda x + 2\lambda y - 3\lambda z,\ 2\lambda x + \lambda z,\ 4\lambda x + \lambda y,\ -\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda z] \\
&= \lambda[x + 2y - 3z,\ 2x + z,\ 4x + y,\ -x + 3y + 2z] \\
&= \lambda v \cdot M = \lambda f(v).
\end{aligned}
$$

c) La aplicación

$$
a' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto g(a') = M \cdot a' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}
$$

es *lineal*, pues

$$
g(a_1' + a_2') = M(a_1' + a_2') =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) + 4(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) \\ 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) + 3(t_1 + t_2) \\ -3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(t_1 + t_2) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 4z_1 - t_1 \\ 2x_1 + z_1 + 3t_1 \\ -3x_1 + y_1 + 2t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 + 4z_2 - t_2 \\ 2x_2 + z_2 + 3t_2 \\ -3x_2 + y_2 + 2t_2 \end{pmatrix} = M \cdot a_1' + M \cdot a_2'.
$$

Se puede mostrar de forma análoga que

$$g(\lambda a') = M(\lambda a') = \lambda M \cdot a' = \lambda g(a').$$

6. a) Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A \cdot X = (a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, a^n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_j a^j + \ldots + x_n a^n$$

y

$$[A \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_j a^j + \ldots + x_n a^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0]$$

es decir que las columnas $a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, a^n$ de la matriz A son vectores linealmente independientes.

b) Si se descompone la matriz $A_{(m,n)}$ en dos sub-matrices $B_{(m,k)}$ y $C_{(m,n-k)}$ tales que $A = [B\,C]$, la matriz $M_{(m+p,k)} = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$, en donde $D_{(p,k)}$ es una matriz con p filas y k columnas, se deduce de la matriz A por supresión de columnas y adición de nueva filas. Demostremos que si A tiene columnas independientes, también las tiene la matriz $M = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$. En efecto, se tiene:

$$M \cdot X = 0_{(m+p,\,1)} \Rightarrow \underset{(m+p,\,k)}{\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}} \cdot X_{(k,1)} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} B \cdot X \\ D \cdot X \end{bmatrix}_{(m+p,\,1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [B \cdot X_{(m,1)} = 0] \Rightarrow [B\,C]_{(m,n)} \cdot \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}_{(n,1)} = 0 \Rightarrow A \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0$$

c) Si una matriz cuadrada M es inversible, se tiene:

$$M \cdot X = 0 \Rightarrow M^{-1}(M \cdot X) = 0 \Rightarrow (M^{-1} \cdot M)\, X = 0 \Rightarrow I \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0$$

y la matriz M tiene columnas independientes.

d) Si una matriz horizontal $L_{(m,n)}$ tuviera columnas independientes, le ocurriría lo mismo, según b), a la matriz cuadrada $C_{(n,n)} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$. La matriz cuadrada C sería entonces inversible, lo que está en contradicción con el hecho de que C, teniendo por lo menos una fila entera nula, no puede tener inversa a la derecha. Una matriz horizontal L tiene entonces necesariamente columnas independientes, es decir que una matriz con columnas independientes es necesariamente vertical o cuadrada.

Además, una matriz horizontal L carece de inversa a la izquierda M, pues de otra forma

$$L \cdot X = 0 \Rightarrow M(L \cdot X) = 0 \Rightarrow M \cdot L \cdot X = 0 \Rightarrow I \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0$$

lo que está en contradicción con el que una matriz horizontal tenga columnas independientes.

7. a) Como el determinante (a^2+b^2) de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ no nula del conjunto $\mathfrak{M}$ es distinto de cero, toda matriz A no nula de $\mathfrak{M}$ es regular. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tiene por matriz adjunta $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, su matriz inversa es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

que pertenece igualmente al conjunto $\mathfrak{M}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ son dos matrices del conjunto $\mathfrak{M}$, su suma

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}$$

y su producto

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(a'b + ab') \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

pertenecen también al conjunto $\mathfrak{M}$.

La adición en $\mathfrak{M}$:

— es conmutativa $A + A' = A' + A$;
— es asociativa $(A + A') + A'' = A + (A' + A'')$;
— tiene un elemento neutro, la matriz $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
— es tal que toda matriz no nula $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tiene otra opuesta $-A = \begin{pmatrix} -a & -(-b) \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Además, la multiplicación en $\mathfrak{M}$

— es asociativa $(A \cdot A')A'' = A(A' \cdot A'')$;
— es distributiva con relación a la adición $A(A' + A'') = A \cdot A' + A \cdot A''$ y $(A' + A'')A = A'A + A''A$;
— tiene un elemento neutro, la matriz unidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
— es tal que toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tiene otra inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

— es conmutativa $A \cdot A' = A' \cdot A$.

Todas estas propiedades confieren al conjunto $\mathfrak{M}$ que goza de la adición y de la multiplicación una estructura de cuerpo conmutativo.

c) Toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ se puede poner en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ,$$

en donde

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

lo que permite el representar toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ por el número complejo $a + bi$. Se verifica que la suma de dos matrices

$$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}$$

corresponde al número complejo

$$(a + a') + (b + b')\,\mathrm{i} = (a + b\,\mathrm{i}) + (a' + b'\,\mathrm{i})$$

y al producto

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} aa' - b\,b' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - b\,b' \end{pmatrix}$$

corresponden el producto

$$(a + b\,\mathrm{i})\,(a' + b'\,\mathrm{i}) = (aa' - bb') + \mathrm{i}(a'b + ab')$$

de los dos números complejos $(a + b\,\mathrm{i})$ y $(a' + b'\,\mathrm{i})$. Se dice que los cuerpos $\mathfrak{M}$ y $\boldsymbol{C}$ son *isomorfos* respecto de la adición y de la multiplicación.

8. *a*)
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

y $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos matrices inversas entre sí. Como dos matrices cuadradas inversas entre sí son conmutativas, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$.

Además, ya que la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible y tiene por inversa a la $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, su transpuesta $\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible y tiene por inversa $\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B}$$

y

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A};$$

y aquí resulta que:

$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{I}$
y $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{I};$

$\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{I}) = -\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$
y $\boldsymbol{B}^4 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{I}) = -\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B};$

$\boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{B}$
y $\boldsymbol{B}^5 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^4 = \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A};$

$\boldsymbol{A}^6 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{B}^6 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^5 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$

Ya que $A^6 = B^6 = I$, se tiene de forma general

$$\begin{array}{lllll} A^{6k} = B^{6k} = I & \text{y} & A^{6k+3} = B^{6k+3} = -I; \\ A^{6k+1} = B^{6k+5} = A & \text{y} & A^{6k+5} = B^{6k+1} = B; \\ A^{6k+4} = B^{6k+2} = -A & \text{y} & A^{6k+2} = B^{6k+4} = -B. \end{array}$$

c) El número de matrices cuadradas de orden dos formadas por los números 0 y -1 cada uno una vez y del número 1 dos veces, es igual al número de combinaciones de 4 objetos (los términos de la matriz) tomados de 3 en 3 $\{0;\ -1;\ 1\}$ según el esquema

4 términos de la matriz

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\underline{0} \quad \underline{-1} \quad \underline{1}$$

Hay pues $\dfrac{4!}{1!\,1!\,2!} = \dfrac{24}{2} = 12$ matrices del tipo descrito anteriormente.

Entre estas doce matrices está la A y su inversa B, así como sus transpuestas A' y B'; hay cuatro matrices que son su propia inversa

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C^{-1}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D^{-1};$$

$$C' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (C')^{-1} \quad \text{y} \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (D')^{-1}$$

y por último cuatro matrices cuyas inversas no pertenecen a la familia, a saber

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad E' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. *a*) Se tiene

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A,$$

y se dice que la matriz A es *idempotente*; $A^3 = A \cdot A^2 = AA = A^2 = A$.

Demostremos por recurrencia que $A^n = A$ para todo entero positivo n. En efecto, se tiene:

$- A^2 = A$,

$- A^{n-1} = A \Rightarrow A^n = A \cdot A^{n-1} = A \cdot A = A^2 = A$.

b) La matriz J tal que $M = J + I$ es

$$J = M - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A,$$

o sea $J = A$ y $M = A + I$.

Ya que, para todo entero positivo k, $I^k = I$ y $A^k \cdot I = I \cdot A^k = A^k = A$ se puede calcular $M^n = (A + I)^n$ empleando la fórmula del binomio:

$$\begin{aligned} M^n = (A+I)^n &= \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} \cdot I + \binom{n}{2} A^{n-2} \cdot I^2 + \ldots + \\ &\quad + \binom{n}{k} A^{n-k} \cdot I^k + \ldots + \binom{n}{n-1} A \cdot I^{n-1} + \binom{n}{n} I^n \\ &= \binom{n}{0} A + \binom{n}{1} A + \binom{n}{2} A + \ldots + \\ &\quad + \binom{n}{k} A + \ldots + \binom{n}{n-1} A + I \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1}\right] A + I; \end{aligned}$$

ya que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

se tiene

$$M^n = (2^n - 1) A + I,$$

para todo entero positivo o nulo n.

c) La matriz K tal que $N + I = K$ es

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A$$

o sea $K = A$ y $N = A - I$. Como en en b) se puede emplear la fórmula del binomio

$$N^n = (A - I)^n =$$

$$= \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1}\cdot I + \binom{n}{2}A^{n-2}\cdot I^2 + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}A^{n-k}\cdot I^k + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}A^{n-1}\cdot I + (-1)^n\binom{n}{n} I$$

$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\right] A + (-1)^n I$$

$$= - (-1)^n A + (-1)^n I = (-1)^{n+1}(A - I) = (-1)^{n+1} N$$

ya que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0,$$

o sea: $N^n = (-1)^{n+1}N$, para todo entero positivo n.

10. a) Se tiene

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = 2\,B;$$

la matriz B^2 se deduce de la B por homotecia de razón 2.

b) $B^3 = B\cdot B^2 = B(2\,B) = 2\,B\cdot B = 2\,B^2 = 2\cdot 2\,B = 2^2 B = 2^{3-1} B$. Demostremos por recurrencia que $B^n = 2^{n-1} B$ para todo entero positivo n. En efecto, se tiene:

$- B^2 = 2^{2-1} B$

$- B^{n-1} = 2^{n-2} B \Rightarrow B^n = B \cdot B^{n-1} = B(2^{n-2} B)$

$$= 2^{n-2} B \cdot B = 2^{n-2} B^2 = 2^{n-2}\cdot 2\,B = 2^{n-1} B.$$

c) La matriz J tal que $M = I + J$ es

$$J = M - I = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = B,$$

o sea $J = B$ y $M = B + I$.

Ya que para todo entero positivo k, $I^k = I$ y $B^k \cdot I = I \cdot B^k = B^k = 2^{k-1} B$, se puede calcular $M^n = (B + I)^n$ utilizando la fórmula del binomio:

$$M^n = (B+I)^n = \binom{n}{0} B^n + \binom{n}{1} B^{n-1} \cdot I + \binom{n}{2} B^{n-2} \cdot I^2 + \dots +$$

$$+ \binom{n}{k} B^{n-k} \cdot I^k + \dots + \binom{n}{n-1} B \cdot I^{n-1} + \binom{n}{n} I$$

$$= \left[\binom{n}{0} 2^{n-1} + \binom{n}{1} 2^{n-2} + \binom{n}{2} 2^{n-3} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{k} 2^{n-k-1} + \dots + \binom{n}{n-1} \right] B + I$$

$$= \left[\binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{k} 2^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 2 \right] \frac{B}{2} + I;$$

ya que

$$\binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} 2^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 2 + \binom{n}{n} = (2+1)^n = 3^n,$$

se tiene

$$M^n = (3^n - 1) \frac{B}{2} + I$$

para todo n positivo o nulo

d) Ya que para todo entero positivo k,

$$(Bx)^k \cdot I = I \cdot (Bx)^k = (Bx)^k = B^k x^k = 2^k \frac{B}{2} x^k,$$

se puede calcular $(Bx + I)^n$ utilizando la fórmula del binomio:

$$(Bx + I)^n = \binom{n}{0} (Bx)^n + \binom{n}{1} (Bx)^{n-1} \cdot I + \binom{n}{2} (Bx)^{n-2} \cdot I^2 + \dots +$$

$$+ \binom{n}{k} (Bx)^{n-k} \cdot I^k + \dots + \binom{n}{n-1} (Bx) \cdot I^{n-1} + \binom{n}{n} I$$

$$= \left[\binom{n}{0} 2^n x^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} x^{n-2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{k} 2^{n-k} x^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 2x \right] \frac{B}{2} + I.$$

Como

$$\binom{n}{0} 2^n x^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} x^{n-1} + \dots +$$
$$+ \binom{n}{k} 2^{n-k} x^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 2x + \binom{n}{n} = (2x+1)^n,$$

se tiene

$$(\boldsymbol{B}x + \boldsymbol{I})^n = \frac{(2x+1)^n - 1}{2} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}$$

para todo n positivo o nulo.

11. *a*) La matriz $\boldsymbol{J}$ tal que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$ es

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y $\quad \boldsymbol{J}^3 = \boldsymbol{J}^2 \cdot \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0};$

de donde resulta que $\boldsymbol{J}^n = \boldsymbol{0}$ para todo entero n superior a 2; se dice que $\boldsymbol{J}$ es una matriz *nilpotente* de orden 3. Generalizando se dice que una matriz cuadrada $\boldsymbol{M}$ es nilpotente de orden k si $\boldsymbol{M}^{k-1} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{0}$.

c) Ya que para todo entero positivo k, $\boldsymbol{I}^k = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}^k \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}^k = \boldsymbol{J}^k$, se puede calcular $\boldsymbol{M}^n = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^n$ empleando la fórmula del binomio:

$$\boldsymbol{M}^n = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^n = \binom{n}{0} \boldsymbol{I}^n + \binom{n}{1} \boldsymbol{I}^{n-1} \cdot \boldsymbol{J} + \binom{n}{2} \boldsymbol{I}^{n-2} \cdot \boldsymbol{J}^2 + \dots +$$
$$+ \binom{n}{k} \boldsymbol{I}^{n-k} \cdot \boldsymbol{J}^k + \dots + \boldsymbol{J}^n$$
$$= \boldsymbol{I} + n\boldsymbol{J} + \frac{n(n-1)}{2} \boldsymbol{J}^2 \quad (\text{ya que } \boldsymbol{J}^3 = \boldsymbol{J}^4 = \dots = \boldsymbol{J}^k = \dots = \boldsymbol{J}^n = \boldsymbol{0})$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix},$$

o sea:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}.$$

12. *a)* $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}64 & 0{,}68 \end{pmatrix}$

es una matriz de Markov, ya que $0{,}36 + 0{,}64 = 1$ y $0{,}32 + 0{,}68 = 1$ y

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}64 & 0{,}68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}328 & 0{,}336 \\ 0{,}672 & 0{,}664 \end{pmatrix}$$

es también una matriz de Markov.

b) Demostremos por recurrencia que M^n es una matriz de Markov. En efecto:

— M es una matriz de Markov,

— si en $M^{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$, $\quad a_{n-1} + b_{n-1} = c_{n-1} + d_{n-1} = 1,$

se tiene $M^n = M \cdot M^{n-1}$ en donde

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}2\, a_{n-1} + 0{,}4\, b_{n-1} & 0{,}2\, c_{n-1} + 0{,}4\, d_{n-1} \\ 0{,}8\, a_{n-1} + 0{,}6\, b_{n-1} & 0{,}8\, c_{n-1} + 0{,}6\, d_{n-1} \end{pmatrix},$$

con

$$a_n + b_n = 0{,}2\, a_{n-1} + 0{,}4\, b_{n-1} + 0{,}8\, a_{n-1} + 0{,}6\, b_{n-1} =$$
$$= (0{,}2 + 0{,}8)\, a_{n-1} + (0{,}4 + 0{,}6)\, b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} = 1$$

y

$$c_n + d_n = 0{,}2\, c_{n-1} + 0{,}4\, d_{n-1} + 0{,}8\, c_{n-1} + 0{,}6\, d_{n-1} =$$
$$= (0{,}2 + 0{,}8)\, c_{n-1} + (0{,}4 + 0{,}6)\, d_{n-1} = c_{n-1} + d_{n-1} = 1.$$

Se puede demostrar que toda potencia entera positiva de una matriz de Markov de formato $m \times m$ es también una matriz de Markov.

c) La matriz $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ que tiene por determinante

$$0{,}2 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \cdot 0{,}8 = -0{,}2$$

y por matriz adjunta $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 \\ -0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ tiene por matriz inversa

$$M^{-1} = -\frac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 \\ -0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz M^{-1} no es de Markov, pues sus términos no son todos positivos o nulos. No obstante, obsérvese que la suma de los términos de cada columna es igual a 1. Esta propiedad se extiende a las matrices $M^{-n} = (M^{-1})^n$ para n entero positivo.

d) $$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2,2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz de Markov, ya que

$$\frac{0,8}{3} + \frac{2,2}{3} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Análogamente:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & \frac{1,4}{3} \\ 0,4 & \frac{1,6}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz de Markov.

Generalizando, se puede demostrar que si M y N son dos matrices de Markov, las matrices $M^m N^n$ y $N^n M^m$, en donde n y m son enteros positivos, también son matrices de Markov.

13. $$A \cdot A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

la matriz A es ortogonal [Ver pág. 191].

Los vectores líneas $a_1 = (\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$ y $a_2 = (-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$ son ortogonales (y por consiguiente independientes), ya que su *producto* escalar $a_1 \cdot a_2'$ es nulo, y tienen por longitud *uno*, ya que

$$|a_1| = \sqrt{a_1 \cdot a_1'} = 1 \quad \text{y} \quad |a_2| = \sqrt{a_2 \cdot a_2'} = 1;$$

luego forman una base ortonormada del espacio euclidiano R^2.

14. *a*) Se tiene

$$\det \boldsymbol{M} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1, \quad \widetilde{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{M}}}{\det \boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\det \boldsymbol{N} = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = -9, \quad \widetilde{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad \boldsymbol{N}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\det \boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 4/9 & -5/9 \end{pmatrix};$$

$\det \boldsymbol{P} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 0$ y la matriz $\boldsymbol{P}$ es singular, es decir que carece de inversa; $\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Desarrollando el determinante de la matriz $\boldsymbol{Q}$ siguiendo la segunda columna (que tiene dos ceros), se obtiene

$$\det \boldsymbol{Q} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2(3 \cdot 1 - 4(-2)) = -22;$$

la matriz adjunta de $\boldsymbol{Q}$, que es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores, se expresa

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -11 & 7 & -17 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{Q}}}{\det \boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/11 & -4/11 \\ 1/2 & -7/22 & 17/22 \\ 0 & 2/11 & 3/11 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinado de la matriz $\boldsymbol{R}$ siguiendo la segunda línea (que contiene un cero), se obtiene:

$$\det \boldsymbol{R} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(1(-1) - 2(-2)) + (4(-1) - 2(-2)) = -9;$$

la matriz adjunta de $\boldsymbol{R}$ se expresa

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad \boldsymbol{R}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{R}}}{\det \boldsymbol{R}} = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/3 & -2/9 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ -4/9 & 2/3 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante de la matriz $\boldsymbol{S}$ siguiendo la última columna, se obtiene:

$$\det \boldsymbol{S} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -16 - (-16) = 0$$

y la matriz $\boldsymbol{S}$ es singular, es decir que carece de inversa; la matriz adjunta de $\boldsymbol{S}$ es

$$\widetilde{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}.$$

15. *a*) El sistema dado se expresa en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

o bien por $\boldsymbol{M} \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{B}$, con $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Al multiplicar simultáneamente las matrices $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{I}$ por las dos matrices una combinación lineal y otra diagonal [Ver tomo 1, pág. 185], se obtiene:

Factores		
$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{I}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{C}_2$	$\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}_1$
$\begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{C}_3$	$\boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13/20 \\ 0 & 1 & 11/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 13/5 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{C}_3 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{C}_3 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1$
$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/8 & -1/20 & 13/20 \\ -5/8 & -7/4 & 11/4 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_3 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_3 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{M}^{-1}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/16 & -1/40 & 13/40 \\ 1/16 & 7/40 & -11/40 \\ -1/8 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{M}^{-1}$

De donde resulta que $X = M^{-1} \cdot B$ o bien

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{40} & -\frac{11}{40} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{93}{80} \\ -\frac{131}{80} \\ -\frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

es decir:

$$x = \frac{93}{80}, \quad y = -\frac{131}{80} \quad \text{y} \quad z = -\frac{17}{8}.$$

c) Al desarrollar la matriz M por la primera fila, se obtiene:

$$\begin{aligned} \det M &= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(2\cdot 1 - 3(-1)) - 6(4\cdot 1 - 3\cdot 3) - 4(4(-1) - 2\cdot 3) \\ &= 2\cdot 5 - 6\cdot(-5) - 4\cdot(-10) = 10 + 30 + 40 = 80. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones tiene entonces una solución, a saber:

$$x = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{80}$$

$$= \frac{5 - 6(-14) - 4(-1)}{80} = \frac{93}{80},$$

$$y = \frac{\det\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{80}$$

$$= \frac{-28 + 5 - 108}{80} = -\frac{131}{80}$$

y

$$z = \frac{\det \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det \boldsymbol{M}} = \frac{2\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{80}$$

$$= \frac{2 - 6 \cdot 27 - 10}{80} = -\frac{170}{80} = -\frac{17}{8}$$

d) Los nueve menores de la matriz $\boldsymbol{M}$ son:

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5; \quad \Delta_1^2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5;$$

$$\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10;$$

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2; \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14;$$

$$\Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 18 = -20;$$

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 8 = 26; \quad \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 16 = 22;$$

$$\Delta_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 24 = -20.$$

De aquí resulta que

$$M_1^1 = (-1)^{1+1}\Delta_1^1 = \Delta_1^1 = 5; \qquad M_1^2 = (-1)^{1+2}\Delta_1^2 = -\Delta_1^2 = 5;$$

$$M_1^3 = (-1)^{1+3}\Delta_1^3 = -10; \qquad M_2^1 = (-1)^{2+1}\Delta_2^1 = -\Delta_2^1 = -2;$$

$$M_2^2 = (-1)^{2+2}\Delta_2^2 = \Delta_2^2 = 14; \quad M_2^3 = (-1)^{2+3}\Delta_2^3 = 20;$$

$$M_3^1 = (-1)^{3+1}\Delta_3^1 = \Delta_3^1 = 26; \quad M_3^2 = (-1)^{3+2}\Delta_3^2 = -\Delta_3^2 = -22;$$

$$M_3^3 = (-1)^{3+3}\Delta_3^3 = \Delta_3^3 = -20;$$

y la matriz adjunta es

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = (M_i^j)' = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 26 \\ 5 & 14 & -22 \\ -10 & 20 & -20 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de $\boldsymbol{M}$ es, pues,

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{M}} \widetilde{\boldsymbol{M}} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{M}}}{80} = \begin{pmatrix} 1/16 & -1/40 & 13/40 \\ 1/16 & 7/40 & -11/40 \\ -1/5 & 1/5 & -1/4 \end{pmatrix}$$

volviéndose a encontrar el resultado de *b*).

16. *a*) Desarrollando el determinante de la matriz $\boldsymbol{M}$ por la primera fila (que tiene un cero), se obtiene:

$$\det \boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19.$$

Al desarrollar el determinante de la matriz N por la primera fila, se obtiene:

$$\det \boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -40 + 7 = -33.$$

Al desarrollar el determinante de la matriz $\boldsymbol{P}$ por la tercera fila (que tiene un cero), se obtiene:

$$\det \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17.$$

Al desarrollar el determinante de la matriz $\boldsymbol{Q}$ por la primera fila se obtiene:

$$\det \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5.$$

b) Al desarrollar el determinante de la matriz $\boldsymbol{R}$ por la primera fila, se obtiene:

$$\det \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

o sea:

$$\det \boldsymbol{R} = \det \boldsymbol{M} - 3 \det \boldsymbol{N} - 2 \det \boldsymbol{P} - 4 \det \boldsymbol{Q} =$$

$$= 19 + 99 + 34 + 20 = 172.$$

PROBLEMA V

1) Se considera la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a) Calcular D^2, D^3 y D^n para n entero positivo.

b) Calcular las matrices $S_n = I + D + D^2 + \dots + D^n$. ¿Para qué valores de a y de b la matriz S_n tiene límite cuando n se hace infinito? Comparar la matriz límite S, cuando exista, con la inversa de la matriz $I - D$.

c) Calcular e^D, sen D y cos D.

2) Se considera la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calcular D^2, D^3 y D^n para n entero positivo.

b) Calcular la matriz $S_n = I - D + D^2 + \dots + (-1)^n D^n$. ¿Para qué valores de a, b y c la matriz S tiene límite cuando n se hace infinito? Comparar la matriz límite S, cuando exista, con la inversa de la matriz $I + D$.

c) Calcular e^D y sh D.

3) Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

a) Determinar su ecuación característica y calcular sus valores propios λ_1 y λ_2.

b) Determinar los vectores $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2.

c) Se considera la matriz cuadrada de formato 2×2, $P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ Calcular P^{-1}, después $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$. ¿Qué particularidad presenta la matriz D?

d) Calcular M y después M^n en función de las matrices P y D y de n.

e) Deducir e^M, sen M y cos M.

4) Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en donde a, b, c, y $d \in \mathbf{R}$.

a) Determinar su ecuación característica. ¿Qué relación debe ligar a a, b, c y d para que la matriz tenga valores propios reales y distintos λ_1 y λ_2.

b) Se supone que la matriz M tiene dos valores propios distintos λ_1 y λ_2 a los cuales corresponden los vectores propios

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

y se considera la matriz

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Calcular P^{-1} y después $P^{-1} \cdot M \cdot P$.

c) Deducir de *b*) que toda serie matricial $S(M)$ es convergente cuando las series numéricas $S(\lambda_1)$ y $S(\lambda_2)$ convergen.

5) Se considera la matriz de Markov $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Determinar su ecuación característica y sus valores propios λ_1 y λ_2.

b) Determinar los vectores propios $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2.

c) Se considera la matriz cuadrada de formato 2×2,

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Calcular P^{-1}, después $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$. Deducir M y después M^n en función de las matrices P y D y de n. Verificar que M^n es una matriz de Markov. Calcular el límite M^∞ de M^n cuando n se hace infinito. ¿Es una matriz de Markov?

6) Se considera la matriz de Markov

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}, \quad \text{en donde} \quad \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant b \leqslant 1 \end{cases}.$$

a) Demostrar que toda matriz de Markov tiene un valor propio $\lambda_1 = 1$, y calcular el segundo valor propio λ_2. Calcular los vectores propios correspondientes $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

b) Calcular la matriz inversa P^{-1} de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ y la matriz $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

Deducir la expresión de M^n y de su límite M^∞ cuando n se hace infinito.

7) Se considera la matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Determinar su ecuación característica y sus valores propios λ_1 y λ_2. Calcular los vectores propios correspondientes $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

b) Calcular la matriz inversa P^{-1} de la matriz

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

y la matriz $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$. Deducir la expresión de M^n.

c) ¿Cuál es la expresión de M^n cuando $a=b$? ¿Cuándo $a = -b$?

d) Calcular el límite M^∞ de M^n cuando M es una matriz de Markov simétrica.

8) Se considera la matriz de Markov $M = \begin{pmatrix} 11/18 & 1/9 & 2/9 \\ 1/18 & 5/9 & 1/9 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

a) Determinar su ecuación característica y sus valores propios λ_1, λ_2 y λ_3. Calcular los vectores propios correspondientes

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

b) Calcular la matriz inversa P^{-1} de la matriz cuadrada de formato 3×3:

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{y la matriz} \quad D = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

c) Deducir de b) la expresión de M y de M^n en función de las matrices P, D y de n.

Determinar el límite M^∞ de M^n cuando n se hace infinito.

9) A) a) Se considera la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^2, A^3 y A^4.

b) Consideremos la matriz, función de un número x:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz $F(x) \cdot F(y)$; y demostrar que es de la misma forma. ¿Qué se puede decir de $F(0)$?

c) Verificar que $F(1) = A$. Demostrar que $A \cdot F(x) = F(4x + 1)$.

d) Deducir que las potencias A^n de la matriz A son todas de la forma $A^n = F(x_n)$, con

$$x_n = 4\,x_{n-1} + 1.$$

B) Sea la ecuación de recurrencia $x_n = 4\,x_{n-1} + 1$. Conociendo el valor inicial $x_0 = 0$, hallar una expresión sencilla de x_n en función de n.

C) a) Calcular las potencias sucesivas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se demostrará en primer lugar que B y B^2 son homtéticas:

$B^2 = aB$ (se determinará el valor del número a)

b) Se designa por I a la matriz unidad: $I \cdot B = B \cdot I = B$ y por x a un número real cualquiera. Utilizando la relación $B^2 = aB$, hallar las expresiones del cuadrado, del cubo y, generalizando, de la potencia n-sima de la matriz $F = xB + I$.

D) a) Utilizando los resultados anteriores de (A) y (B), demostrar que:

$$A^n = 4^n \cdot P + Q,$$

siendo P y Q dos matrices independientes de n que han de calcularse.

b) En esta expresión, ¿la variable n puede tomar valores no enteros? ¿Se pueden definir potencias cualesquiera (por ejemplo la raíz cuadrada) de la matriz? Explicarlo. Estudiar la matriz

$$A_x = 4^x\,P + Q.$$

Soluciones:

1. a) $D^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$;

$$D^3 = D \cdot D^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para todo entero n positivo, $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, pues

— $D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

— $D^{n-1} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix}$ implica

$$D^n = D \cdot D^{n-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

b) $S_n = I + D + D^2 + \ldots + D^n =$

$$= \begin{pmatrix} 1 + a + a^2 + \ldots + a^n & 0 \\ 0 & 1 + b + b^2 + \ldots + b^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b} \end{pmatrix}.$$

Cuando n se hace infinito, las cantidades $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ y $\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$ convergen respectivamente hacia $\dfrac{1}{1-a}$ y $\dfrac{1}{1-b}$ cuando $|a|<1$ y $|b|<1$. De aquí resulta que la matriz S_n tiene por límite la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-b} \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad -1<a<1 \quad \text{y} \quad -1<b<1.$$

La matriz $I - D = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}$ es diagonal y tiene por matriz inversa la $(I-D)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-b} \end{pmatrix} = S$ si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ condiciones que se complen si $-1 < a < 1$ y $-1 < b < 1$.

c) Por definición:

$$e^D = I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^n}{n!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + \dots + \dfrac{a^n}{n!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{b}{1!} + \dfrac{b^2}{2!} + \dots + \dfrac{b^n}{n!} + \dots \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ para todo a y b reales.

Por definición:

$$\operatorname{sen} D = D - \frac{D^3}{3!} + \frac{D^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{D^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} a - \dfrac{a^3}{3!} + \dfrac{a^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & 0 \\ 0 & b - \dfrac{b^3}{3!} + \dfrac{b^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} b \end{pmatrix}$ para todo a y b reales.

Por definición:

$$\cos D = I - \frac{D^2}{2!} + \frac{D^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{D^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{a^2}{2!} + \dfrac{a^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{a^{2n}}{(2n)!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{b^2}{2!} + \dfrac{b^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{b^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \cos a & 0 \\ 0 & \cos b \end{pmatrix}$ para todo a y b reales.

2. a) $D^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$,

$$D^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

$$S_n = I - D + D^2 + \ldots + (-1)^n D^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1-a+a^2+\ldots+(-1)^n a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1-b+b^2+\ldots+(-1)^n b^n & 0 \\ 0 & 0 & 1-c+c^2+\ldots+(-1)^n c^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1-(-1)^{n+1} a^{n+1}}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-(-1)^{n+1} b^{n+1}}{1+b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-(-1)^{n+1} c^{n+1}}{1+c} \end{pmatrix}$$

Cuando n se hace infinito, las cantidades

$$\frac{1-(-1)^{n+1} a^{n+1}}{1+a}; \quad \frac{1-(-1)^{n+1} b^{n+1}}{1+b}; \text{ y } \frac{1-(-1)^{n+1} c^{n+1}}{1+c}$$

convergen respectivamente a

$$\frac{1}{1+a}, \quad \frac{1}{1+b} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+c}$$

cuando $|a| < 1$, $|b| < 1$ y $|c| < 1$. De aquí se deduce que la matriz S_n tiene por límite la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+c} \end{pmatrix}$$

si $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$ y $-1 < c < 1$.

La matriz

$$I + D = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & 1+c \end{pmatrix}$$

es diagonal y tiene por matriz inversa a la

$$(I + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+c} \end{pmatrix} = S$$

si $a \neq -1$, $b \neq -1$, $c \neq -1$ condiciones que se satisfacen si $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$ y $-1 < c < 1$.

c) Por definición:

$$e^D = I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^n}{n!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \dots + \frac{b^n}{n!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \dots + \frac{c^n}{n!} + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \text{ para todo } a, b \text{ y } c \text{ reales.}$$

Por definición:

$$\operatorname{sh} D = D + \frac{D^3}{3!} + \dots + \frac{D^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} a + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & b + \frac{b^3}{3!} + \dots + \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & c + \frac{c^3}{3!} + \dots + \frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sh} a & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} b & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} c \end{pmatrix} \text{ para todo } a, b \text{ y } c \text{ reales.}$$

3. *a*) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M}$ se obtiene expresando que el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

es nulo, o sea $(2-\lambda)(13-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 15\lambda + 14 = 0$.

Esta ecuación, cuyo discriminante es $\Delta = 225 - 56 = 169 = 13^2$, tiene por raíces

$$\lambda_1 = \frac{15+13}{2} = 14 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{15-13}{2} = 1.$$

que son los valores propios de la matriz $\boldsymbol{M}$.

b) El vector propio $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 14$ es tal que

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}_1 = 14\,\boldsymbol{x}_1 \text{ o bien } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{cases} 2 + 4\,\alpha_1 = 14 \\ 3 + 13\,\alpha_1 = 14\,\alpha_1 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_1 = 3$ y $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Análogamente el vector propio $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$ es tal que

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 \text{ o bien } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{cases} 2 + 4\,\alpha_2 = 1 \\ 3 + 13\,\alpha_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_2 = -{}^1/_4$ y $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -{}^1/_4 \end{pmatrix}$.

c) La matriz $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -{}^1/_4 \end{pmatrix}$ tiene por matriz adjunta $\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} -{}^1/_4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y por determinante $\det \boldsymbol{P} = -{}^1/_4 - 3 = -{}^{13}/_4$;

su matriz inversa es, pues:

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{P}}}{\det \boldsymbol{P}} = -\frac{4}{13}\begin{pmatrix} -{}^1/_4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_{13} & {}^4/_{13} \\ {}^{12}/_{13} & -{}^4/_{13} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -{}^1/_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 42 & -{}^1/_4 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 42 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz D es diagonal y sus elementos no nulos son iguales a los valores propios de la matriz M.

d) Ya que $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$ se tiene

$$P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} \cdot M \cdot P \cdot P^{-1} = I \cdot M \cdot I = M,$$

o sea $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$. De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} M^n = M \cdot M \cdot \ldots \cdot M &= P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \ldots P \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D \cdot I \cdot D \ldots I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot P^{-1}, \end{aligned}$$

en virtud de la asociatividad del producto matricial.

e) De las relaciones $I = P \cdot I \cdot P^{-1}$, $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ y $D^n = \begin{pmatrix} 14^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo entero n, se deduce que:

$$\begin{aligned} e^M &= I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \ldots + \frac{M^n}{n!} + \ldots \\ &= P \cdot I \cdot P^{-1} + P \frac{D}{1!} P^{-1} + P \frac{D^2}{2!} P^{-1} + \ldots + P \frac{D^n}{n!} P^{-1} + \ldots \\ &= P \left[I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \ldots + \frac{D^n}{n!} + \ldots \right] P^{-1} \\ &= P \cdot e^D P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{14} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$P \cdot e^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{14} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{14} & e \\ 3\,e^{14} & -\frac{e}{4} \end{pmatrix}$$

implica

$$P \cdot e^D P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{14} & e \\ 3\,e^{14} & -\frac{e}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{14} + 12\,e}{13} & \frac{4\,e^{14} - 4\,e}{13} \\ \frac{3\,e^{14} - 3\,e}{13} & \frac{12\,e^{14} + e}{13} \end{pmatrix}$$

o sea:

$$e^M = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{14} + 12\,e}{13} & \dfrac{4\,e^{14} - 4\,e}{13} \\ \dfrac{3\,e^{14} - 3\,e}{13} & \dfrac{12\,e^{14} + e}{13} \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\operatorname{sen} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} - \frac{\boldsymbol{M}^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\boldsymbol{M}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\boldsymbol{D}^3}{3!} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} + \dots + (-1)^n \boldsymbol{P} \cdot \frac{\boldsymbol{D}^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} + \dots$$

$$= \boldsymbol{P} \left[\boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{D}^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\boldsymbol{D}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right] \boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P} \cdot \operatorname{sen} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sen} 14 + 12 \operatorname{sen} 1}{13} & \dfrac{4 \operatorname{sen} 14 - 4 \operatorname{sen} 1}{13} \\ \dfrac{3 \operatorname{sen} 14 - 3 \operatorname{sen} 1}{13} & \dfrac{12 \operatorname{sen} 14 + \operatorname{sen} 1}{13} \end{pmatrix}.$$

Análogamente:

$$\cos \boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{M}^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{\boldsymbol{M}^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\boldsymbol{D}^2}{2!} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} + \dots + (-1)^n \boldsymbol{P} \cdot \frac{\boldsymbol{D}^{2n}}{(2n)!} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} + \dots$$

$$= \boldsymbol{P} \left[\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{D}^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{\boldsymbol{D}^{2n}}{(2n)!} + \dots \right] \boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P} \cdot \cos \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos 14 + 12 \cos 1}{13} & \dfrac{4 \cos 14 - 4 \cos 1}{13} \\ \dfrac{3 \cos 14 - 3 \cos 1}{13} & \dfrac{12 \cos 14 + \cos 1}{13} \end{pmatrix}.$$

4. a) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M}$ se obtiene escribiendo que el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

es nulo, o sea $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\,\lambda + ad - bc = 0.$

La matriz $\boldsymbol{M}$ tiene dos valores propios reales y distintos si el discriminante de la ecuación característica es positivo, es decir si

$$(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4\,bc$$

es positivo.

b) Si la matriz $\boldsymbol{M}$ tiene dos valores propios reales distintos λ_1 y λ_2, los vectores propios correspondientes $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ son independientes, pues $\alpha_1\neq\alpha_2$.

La matriz $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}$ tiene por matriz adjunta

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ -\alpha_1 & 1\end{pmatrix}$$

y por determinante $\alpha_2-\alpha_1\neq 0$; su matriz inversa es entonces

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{\widetilde{\boldsymbol{P}}}{\det \boldsymbol{P}}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ -\alpha_1 & 1\end{pmatrix}.$$

Como $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\,\boldsymbol{x}_2$,
$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}_2)=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\lambda_2\boldsymbol{x}_2)$ o bien $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1\,\alpha_1 & \lambda_2\,\alpha_2\end{pmatrix}$

y

$$\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ -\alpha_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1\,\alpha_1 & \lambda_2\,\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}\lambda_1(\alpha_2-\alpha_1) & 0\\ 0 & \lambda_2(\alpha_2-\alpha_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

c) De b) se deduce que

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\quad\text{y}\quad \boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

Como una serie matricial $S(\boldsymbol{M})$ se expresa por

$$S(\boldsymbol{M})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,\lambda_1^n & 0\\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,\lambda_2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}S(\lambda_1) & 0\\ 0 & S(\lambda_2)\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

una condición necesaria y suficiente para que la serie matricial converja es que las series numéricas $S(\lambda_1)$ y $S(\lambda_2)$ converjan.

5. a) La ecuación característica de la matriz $\boldsymbol{M}$ se obtiene escribiendo que el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{M}-\lambda\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0{,}2-\lambda & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}6-\lambda\end{pmatrix}$$

es nulo, o sea $\lambda^2-0{,}8\,\lambda-0{,}2=0$.

Esta ecuación, cuyo discriminante $\Delta=0{,}8^2+4\cdot 0{,}2=1{,}44=1{,}2^2$, tiene por raíces

$$\lambda_1=\frac{0{,}8+1{,}2}{2}=1 \quad \text{y} \quad \lambda_2=\frac{0{,}8-1{,}2}{2}=-0{,}2$$

que son los valores propios de la matriz $\boldsymbol{M}$.

b) El vector propio $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1=1$ es tal que

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1 \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}0{,}2+0{,}4\,\alpha_1=1\\ 0{,}8+0{,}6\,\alpha_1=\alpha_1\end{cases}$$

y se tiene $\alpha_1=2$ y $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Análogamente, el vector $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2=-0{,}2$ es tal que

$$M\cdot\boldsymbol{x}_2=-0{,}2\,\boldsymbol{x}_2 \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=-0{,}2\begin{pmatrix}1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\text{o bien} \quad \begin{cases}0{,}2+0{,}4\,\alpha_2=-0{,}2\\ 0{,}8+0{,}6\,\alpha_2=-0{,}2\,\alpha_2\end{cases}$$

y se tiene $\alpha_2=-1$ y $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

c) La matriz $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ tiene por matriz adjunta $\widetilde{\boldsymbol{P}}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ y por determinante $\det\boldsymbol{P}=-1-2=-3$; su matriz inversa es, entonces, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$.

Como

$$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -0{,}2\\ 2 & 0{,}2\end{pmatrix},$$

se tiene

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

De ello se deduce que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ y

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0{,}2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1 + 2(-0{,}2)^n}{3} & \dfrac{1 - (-0{,}2)^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2(-0{,}2)^n}{3} & \dfrac{2 + (-0{,}2)^n}{3} \end{bmatrix}.$$

Cuando n se hace infinito, $(-0{,}2)^n$ se hace nulo y $M^\infty = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
Se verifica que M^n y M^∞ son también matrices de Markov.

6. *a*) La ecuación característica de la matriz de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

es

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - (1 - a)(1 - b) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + a + b - 1 = 0.$$

Esta ecuación, cuyo discriminante es

$\Delta = (a + b)^2 - 4(a + b - 1) = (a + b)^2 - 4(a+b) + 4 = (a+b-2)^2$
tiene por raíces

$$\lambda_1 = \frac{a + b - (a + b - 2)}{2} = 1$$

y
$$\lambda_2 = \frac{a + b + a + b - 2}{2} = a + b - 1.$$

Ahora bien, toda matriz de Markov de formato 2×2 puede expresarse bajo la forma anterior; tiene entonces siempre un valor propio $\lambda_1 = 1$ (*), siendo $\lambda^2 = a + b - 1$. Como $0 \leqslant a \leqslant 1$ y $0 \leqslant b \leqslant 1$

(*) Toda matriz de Markov de formato $n \times n$ tiene un valor propio $\lambda = 1$, siendo los otros valores propios de módulo inferior a 1.

se tiene: $-1 < \lambda_2 < 1$. El vector propio $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ es tal que

$$Mx_1 = x_1 \text{ o bien} \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ o bien} \begin{cases} a + (1-b)\,\alpha_1 = 1 \\ 1 - a + b\alpha_1 = \alpha_1 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_1 = \dfrac{1-a}{1-b}$ y $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$.

El vector propio $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = a + b - 1$ es tal que:

$$Mx_2 = (a + b - 1)\, x_2 \text{ o bien } \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (a + b - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{o bien } \begin{cases} a + (1-b)\,\alpha_2 = a + b - 1 \\ 1 - a + b\alpha_2 = (a + b - 1)\,\alpha_2 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_2 = -1$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) La matriz

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \end{pmatrix}$$

tiene por matriz adjunta

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \dfrac{a-1}{1-b} & 1 \end{pmatrix}$$

y por determinante

$$\det P = -1 - \frac{1-a}{1-b} = \frac{a+b-2}{1-b};$$

entonces su matriz inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & b-1 \\ a-1 & -(b-1) \end{pmatrix}.$$

Como

$$MP = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} & -a-b+1 \end{pmatrix},$$

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & b-1 \\ a-1 & -(b-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} & -a-b+1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a+b-1 \end{pmatrix}.$$

De donde resulta que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ y $M^n = P\, D^n\, P^{-1} =$

$$= \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1+(a-1)(a+b-1)^n & (b-1)[1-(a+b-1)^n] \\ (a-1)[1-(a+b-1)^n] & a-1+(a+b-1)^n(b-1) \end{pmatrix}$$

Cuando n se hace infinito $(a+b-1)^n$ se anula, ya que $-1 < a+b-1 < 1$ y

$$M^\infty = \begin{pmatrix} \dfrac{b-1}{a+b-2} & \dfrac{b-1}{a+b-1} \\ \dfrac{a-1}{a+b-2} & \dfrac{a-1}{a+b-2} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que M^n y M^∞ son matrices de Markov.

7. *a*) La ecuación característica de la matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ es $(a-\lambda)^2 - b^2$; sus raíces son $\lambda_1 = a+b$ y $\lambda_2 = a-b$. Una matriz simétrica de formato 2×2 tiene entonces siempre dos valores propios reales $\lambda_1 = a+b$ y $\lambda_2 = a-b$. El vector propio $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = a+b$ es tal que

$$M \cdot x_1 = (a+b)\, x_1 \text{ o bien } \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{o bien } \begin{cases} a + b\alpha_1 = (a+b) \\ b + a\alpha_1 = (a+b)\,\alpha_1 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_1 = 1$ y $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El vector propio $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ sociado al valor propio $\lambda_2 = a - b$ es tal que

$$M \cdot x_2 = (a - b)\, x_2 \text{ o bien } \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{o bien } \begin{cases} a + b\alpha_2 = a - b \\ b + a\alpha_2 = (a - b)\, \alpha_2 \end{cases}$$

y se tiene $\alpha_2 = -1$ y $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) La matriz $P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene por adjunta $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y por determinante $\det P = -1 - 1 = -2$; su matriz inversa es entonces $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/_2 & 1/_2 \\ 1/_2 & -1/_2 \end{pmatrix}$.

Como

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & a - b \\ a + b & b - a \end{pmatrix},$$

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1/_2 & 1/_2 \\ 1/_2 & -1/_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + b & a - b \\ a + b & b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ y

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} (a + b)^n & 0 \\ 0 & (a - b)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

o sea

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + b)^n + (a - b)^n & (a + b)^n - (a - b)^n \\ (a + b)^n - (a - b)^n & (a + b)^n + (a - b)^n \end{pmatrix}$$

c) Si $M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ se tiene, teniendo en cuenta lo anterior:

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n a^n & 2^n a^n \\ 2^n a^n & 2^n a^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} a^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y si $M = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$, se tiene $M^n = 2^{n-1} a^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ es una matriz de Markov si

$$0 \leqslant a \leqslant 1, \quad 0 \leqslant b \leqslant 1 \quad \text{y} \quad a + b = 1.$$

Como $(a+b)^n = 1^n = 1$ para todo n y $(a-b)^n$ tiende a cero cuando n tiende hacia infinito [pues $|a-b| < 1$], se tiene

$$M^{\infty} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

que es también una matriz de Markov simétrica.

8. *a*) La ecuación característica de la matriz M se obtiene expresando que el determinante de la matriz

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} - \lambda & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{9} - \lambda & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$

es nulo, o sea

$$\left(\frac{11}{18} - \lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{5}{9} - \lambda & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} + \frac{2}{9} \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{9} - \lambda \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$\left(\frac{11}{18} - \lambda\right)\left[\lambda^2 - \frac{11}{9}\lambda + \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{9}\left(-\frac{\lambda}{18}\right) + \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{3}\right) = 0$$

o bien

$$-\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6} = -(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

La matriz M tiene entonces tres valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Resolviendo los sistemas $M \cdot x_1 = x_1$, $M \cdot x_2 = \frac{1}{2} x_2$ y $M \cdot x_3 = \frac{1}{3} x_3$

se encuentra

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La matriz $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ tiene por matriz adjunta

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

y por determinante

$$\det \boldsymbol{P} = 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2};$$

su matriz inversa es, pues,

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{P}}}{\det \boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Se tiene $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ y

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n}{3} & \frac{1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n}{3} & \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{3} \\ \frac{1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n}{6} & \frac{1 + 4(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n}{6} & \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{6} \\ \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{2} & \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{2} & \frac{1 + (\frac{1}{3})^n}{2} \end{pmatrix}$$

Cuando n se hace infinito, $(\frac{1}{2})^n$ y $(\frac{1}{3})^n$ son nulos y

$$M^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que M^n y M^{∞} son matrices de Markov.

9. A) *a*) Al ser cuadrada la matriz A se puede calcular su cuadrado, su cubo y todas sus potencias enteras. Todas esas matrices A^2, A^3, A^4 y A^n son también matrices cuadradas de orden dos.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -21 \\ -42 & 43 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & -21 \\ -42 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & -85 \\ -170 & 171 \end{pmatrix}.$$

b) $F(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$ y $F(y) = \begin{pmatrix} y+1 & -y \\ -2y & 2y+1 \end{pmatrix}$, son matrices cuadradas de orden dos. Se pueden multiplicar, siendo su producto $F(x) \cdot F(y)$ una matriz cuadrada de orden 2, a saber:

$$F(x) \cdot F(y) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+1 & -y \\ -2y & 2y+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+1)(y+1)+2xy & -y(x+1)-x(2y+1) \\ -2x(y+1)-2y(2x+1) & 2xy+(2x+1)(2y+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3xy+x+y+1 & -3xy-x-y \\ -6xy-2x-2y & 6xy+2x+2y+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3xy+x+y+1 & -(3xy+x+y) \\ -2(3xy+x+y) & 2(3xy+x+y)+1 \end{pmatrix}$$

o sea

$$F(x) \cdot F(y) = F(3xy+x+y).$$

$F(0)$ es la matriz $F(x)$, en donde se hace $x = 0$, o sea

$$F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad \text{matriz media de orden dos.}$$

c) Si en la matriz $F(x)$ se elige $x = 1$, se obtiene:

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ -2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Igualmente se verifica que $A^2 = F(5)$; $A^3 = F(21)$ $A^4 = F(85)$. En efecto:

$$F(5) = \begin{pmatrix} 5+1 & -5 \\ -10 & 10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} = A^2$$

$$F(21) = \begin{pmatrix} 21+1 & -21 \\ -42 & 42+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -21 \\ -42 & 43 \end{pmatrix} = A^3$$

$$F(85) = \begin{pmatrix} 85+1 & -85 \\ -170 & 170+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & -85 \\ -170 & 171 \end{pmatrix} = A^4.$$

Calculemos el producto $A \cdot F(x) = F(1) \cdot F(x)$. Según b)

$$F(x) \cdot F(y) = F(3xy+x+y).$$

Si se hace $y = 1$, se encuentra:

$$A \cdot F(x) = F(1) \cdot F(x) = F(3x+x+1) = F(4x+1)$$

o bien

$$A \cdot F(x) = F(4x+1).$$

d) De este último resultado se puede deducir que las potencias A^n de la matriz A son de la forma $A^n = F(x_n)$ con:

$$x_n = 4\,x_{n-1} + 1.$$

En efecto, se sabe que

$$\begin{cases} I = A^0 = F(0) = F(x_0), \text{ en donde } x_0 = 0, \\ \quad\text{y} \\ A = A^1 = F(1) = F(x_1), \text{ en donde } x_1 = 4\,x_0 + 1 = 1, \end{cases}$$

y si $A^{n-1} = F(x_{n-1})$, entonces $A^n = F(4\,x_{n-1} + 1)$, pues

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = A \cdot F(x_{n-1}) = F(4\,x_{n-1} + 1) = F(x_n),$$

con

$$x_n = 4\,x_{n-1} + 1. \qquad \text{c.q.d.}$$

Puede verificarse que $A^2 = F(5)$, de donde $5 = 4\,x_1 + 1$; $A^3 = F(21)$, de donde $21 = 4 \cdot 5 + 1$; y $A^4 = F(85)$, de donde $85 = 4 \cdot 21 + 1$.

B) La ecuación $x_n = 4\,x_{n-1} + 1$ es una ecuación de recurrencia de primer orden, cuyo segundo miembro es una constante como $x_0 = 0$, se tiene (**II.A.2₁**)

$$x_n = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

De A-d) se deduce que $A^n = F(x_n) = F\left(\dfrac{4^n - 1}{3}\right)$.

C) *a*) Al ser B una matriz cuadrada de orden dos, se podrá calcular su cuadrado, su cubo y todas sus potencias enteras positivas y esas matrices son también matrices cuadradas de orden dos.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 3\,B$$

$$B^2 = 3\,B \quad (a = 3);$$

sea:

$$B^3 = B \cdot B^2 = B \cdot 3\,B = 3\,B^2 = 3 \cdot 3\,B = 3^2\,B = 9\,B \text{ o bien } B^3 = 3^{3-1}\,B.$$

Este resultado nos hace suponer que B^n es de la forma $B^n = 3^{n-1}\,B$.

Demostremos por recurrencia que, efectivamente, se tiene

$B^n = 3^{n-1} B$. Supongamos que $B^{n-1} = 3^{n-2} B$, se tiene entonces:

$$B^n = B \cdot B^{n-1} = B \cdot 3^{n-2} B = 3^{n-2} B^2 = 3^{n-2}\, 3\, B = 3^{n-1} B.$$

Como la relación $B^n = 3^{n-1} B$ se verifica para $n = 3$ y si es cierta para $n-1$, lo es también para n, tenemos:

$$B^n = 3^{n-1} B \text{ para todo } n \text{ entero positivo.}$$

b) $F^2 = (xB + I)^2 = x^2 B^2 + 2\, x\, B + I$, ya que las matrices xB e I son conmutativas, y

$$\begin{aligned} F^2 &= 3\, x^2 B + 2\, xB + I = (3\, x^2 + 2\, x)\, B + I \\ &= \frac{(3\, x + 1)^2 - 1}{3} B + I; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^3 &= (xB + I)^3 = x^3 B^3 + 3\, x^2 B^2 + 3\, xB + I \\ &= 3^2 x^3 B + 3 \cdot 3\, x^2 B + 3\, xB + I \\ &= (9\, x^3 + 9\, x^2 + 3\, x)\, B + I \\ &= \frac{(3\, x + 1)^3 - 1}{3} B + I. \end{aligned}$$

De manera general, se podrá emplear la fórmula del binomio para calcular $F^n = (xB + I)^n$, ya que al ser I la matriz unidad, se tiene:

$$I \cdot B^n = B^n \cdot I = B^n \text{ para todo } n \text{ entero positivo.}$$

$$\begin{aligned} F^n = (xB + I)^n &= x^n B^n + \binom{n}{1} x^{n-1} B^{n-1} + \dots + \\ &\quad + \binom{n}{k} x^{n-k} B^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} xB + I \\ &= x^n 3^{n-1} B + \binom{n}{1} x^{n-1} 3^{n-2} B + \dots + \\ &\quad + \binom{n}{k} x^{-k} 3^{n-k-1} B + \dots + \binom{n}{n-1} xB + I \\ &= \left[x^n 3^{n-1} + \binom{n}{1} x^{n-1} 3^{n-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{k} x^{n-k} 3^{n-k-1} + \dots + \binom{n}{n-1} x \right] B + I \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left[3^n x^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} x^{n-1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{k} 3^{n-k} x^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 3x \right] \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}.$$

Ahora bien

$$(3x+1)^n = 3^n x^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} x^{n-1} + \dots +$$

$$+ \binom{n}{k} 3^{n-k} x^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} 3x + 1;$$

se tiene

$$\boldsymbol{F}^n = \frac{(3x+1)^n - 1}{3} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}.$$

Si se hace $x\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}(x)$, se tiene:

$$\overline{\boldsymbol{F}(x)}^n = \boldsymbol{F}\left[\frac{(3x+1)^n - 1}{3}\right].$$

D) *a*) Se ha demostrado en A-d) que:

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{F}\left(\frac{4^n - 1}{3}\right) = \frac{4^n - 1}{3} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}$$

ya qu ese ha visto en C-*b*) que $\boldsymbol{F}(x) = x\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}$.

Luego:

$$\boldsymbol{A}^n = \frac{4^n - 1}{3} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I} = \frac{4^n \boldsymbol{B}}{3} + \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{B}}{3}\right)$$

$$= 4^n \frac{\boldsymbol{B}}{3} + \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{B}}{3}\right)$$

y $\boldsymbol{A}^n = 4^n \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ con:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{B}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

y

$$Q = I - \frac{B}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) $4^n \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ existe cualquiera que sea n y es una matriz cuadrada de formato 2×2, ya que 4^n existe para todo n.

Por lo tanto, cualquiera que sea el número real x, se puede definir la matriz

$$\boldsymbol{A}_x = 4^x \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q},$$

y se tiene

$$\boldsymbol{A}_x \boldsymbol{A}_y = (4^x \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q})(4^y \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = 4^{x+y}\ \boldsymbol{P}^2 + 4^x \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} + 4^y \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2,$$

con

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\boldsymbol{B} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{B}}{3}.$$

Como

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}^2 = \dfrac{1}{9}\boldsymbol{B}^2 = \dfrac{1}{9}3\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}, \\ \boldsymbol{Q}^2 = \left(\boldsymbol{I} - \dfrac{\boldsymbol{B}}{3}\right)^2 = \boldsymbol{I} - \dfrac{2\boldsymbol{B}}{3} + \dfrac{\boldsymbol{B}^2}{9} = \boldsymbol{I} - \dfrac{2\boldsymbol{B}}{3} + \dfrac{3\boldsymbol{B}}{9} = \boldsymbol{I} - \dfrac{\boldsymbol{B}}{3} = \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{P} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{I} - \dfrac{\boldsymbol{B}}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{9}\boldsymbol{B}^2 = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{B} - \dfrac{3\boldsymbol{B}}{9} = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

se tiene

$$\boldsymbol{A}_x \cdot \boldsymbol{A}_y = 4^{x+y}\boldsymbol{P}^2 + (4^x + 4^y)\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 = 4^{x+y}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}_{x+y}.$$

La igualdad $\boldsymbol{A}_x \cdot \boldsymbol{A}_y = \boldsymbol{A}_{x+y}$ al caracterizar la ley exponencial, permite escribir $\boldsymbol{A}_x = \boldsymbol{A}^x$ y $\boldsymbol{A}^x = 4^x \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ designa una potencia cualquiera de $\boldsymbol{A}$.

En particular, la raíz cuadrada de $\boldsymbol{A}$ será $\boldsymbol{A}^{1/2} = 4^{1/2}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$. O sea:

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Se verifica

$$A^{1/2} \cdot A^{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

lo que justifica la denominación de raíz cuadrada de A por $A^{1/2}$.

Análogamente, la matriz inversa de A será $A^{-1} = 4^{-1} P + Q$, o bien

$$A^{-1} = \frac{P}{4} + Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y se verifica bien que

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La fórmula $A^x = 4^x P + Q$ nos permite obtener todas las potencias de A, ya que las de cuarto orden están definidas.

PROBLEMA V'

1) Determinar las particularidades que poseen las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(Se calcularán las potencias de esas matrices).

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

(Se compararán las potencias de esas matrices).

c) $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$; $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} & 0 \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} & 0 \end{pmatrix}$

(Se multiplicará cada matriz por su transpuesta).

d) $A_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $B_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $C_3 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

2) Qué relaciones deben ligar a los términos de una matriz: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para que:

a) M sea una matriz idempotente;

b) M^2 sea homotética con M (es decir $M^2 = \lambda M$);

c) M sea una matriz nilpotente (interesarán las matrices tales como $M^2 = 0$);

d) M sea una matriz ortogonal.

3) Determinar la matriz M^n cuando:

a) $M = A + I$, en donde A es una matriz idempotente (I = matriz unidad);

b) $M = A - I$, en donde A es una matriz idempotente;

c) $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix};$

d) $M = A + I$, donde $A^2 = \lambda A$;

e) $M = A - I$, donde $A^2 = \lambda A$;

f) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2, B^2, C^2 y en general A^n, B^n y C^n.

5) Consideremos las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}.$$

Calcular A_1^2, B_1^2 y C_1^2, después A_1^n, B_1^n y C_1^n para n entero positivo.

6) Determinar la ecuación característica, los valores propios y los vectores propios de las matrices siguientes:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

g) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ h) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ i) $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

j) $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ k) $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ l) $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

m) $M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n) $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}$ o) $M = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

p) $M = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ q) $M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ r) $M = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -18 & 3 \end{pmatrix}$

s) $M = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ t) $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ u) $M = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

v) $M = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ w) $M = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ x) $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

y) $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ z) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ a) $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7) α) Demostrar que los vectores propios de las matrices simétricas siguientes:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

g) $M = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ h) $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ i) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

son ortogonales.

β) Demostrar que para dichas matrices simétricas, existe una matriz cuadrada ortogonal P tal que $P' \cdot M \cdot P$ es una matriz diagonal en la que se ha de determinar el valor de los términos no nulos.

Soluciones:

1. a) $A^2 = A$; $B^2 = B$ y $C^2 = C$; A, B y C son idempotentes.

b) $A_1^2 = 3A_1$; $B_1^2 = 5B_1$ y $C_1^2 = 10C_1$; A_1^2; B_1^2 y C_1^2 son, respectivamente, homotéticas con A_1, B_1 y C_1.

c) $A_2 \cdot A_2' = I$; $B_2 \cdot B_2' = I$; $C \cdot C_2' = I$; A_2, B_2 y C_2 son ortogonales.

d) A_3; B_3 y C_3 son matrices de Markov. B_3 es también simétrica.

2. a) Para que una matriz $\boldsymbol{M}$ sea idempotente, es necesario y suficiente que $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ o bien} \begin{cases} a + d = 1 \\ a^2 + bc = a \end{cases} \text{ o bien} \begin{cases} a + d = 1 \\ bc = ad. \end{cases}$$

b) Para que $\boldsymbol{M}^2 = \lambda \boldsymbol{M}$ es necesario y suficiente que

$$\begin{cases} a + d = \lambda \\ a^2 + bc = \lambda a \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} a + d = \lambda \\ bc = ad. \end{cases}$$

c) Según b) $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{0}$ si $\begin{cases} a + d = 0 \\ bc = ad \end{cases}$

d) Para que una matriz $\boldsymbol{M}$ sea ortogonal, es necesario y suficiente que:

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{I}, \text{ o sea } \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{o bien } \begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 + c^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

3. a) $\boldsymbol{M}^n = (2^n - 1)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$;

b) $\boldsymbol{M}^n = (-1)^{n+1}\boldsymbol{M}$;

c)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix} (2^n - 1)3 + 1 & 2^n - 1 \\ -6(2^n - 1) & -2(2^n - 1) + 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix} (2^n - 1)7 + 1 & 21(2^n - 1) \\ -2(2^n - 1) & -6(2^n - 1) + 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix} 3(2^n - 1) + 1 & 6(2^n - 1) \\ -1(2^n - 1) & -2(2^n - 1) + 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix} -(2^n - 1) + 1 & -2(2^n - 1) \\ (2^n - 1) & 2(2^n - 1) + 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} - \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{M}^n = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix};$$

d) $\boldsymbol{M}^n = \dfrac{\boldsymbol{A}}{\lambda}[(\lambda + 1)^n - 1] + (-1)^n \boldsymbol{I}$;

e) $M^n = \dfrac{A}{\lambda}[(\lambda - 1)^n - (-1)^n] + I = \dfrac{A}{\lambda}[(\lambda - 1)^n + (-1)^{n+1}] + I;$

f) $M = A + I$, en donde $A^2 = 3A$, y

$$M^n = \frac{A}{3}[4^n - 1] + I = \begin{pmatrix} \dfrac{4^n - 1}{3} + 1 & -\dfrac{2(4^n - 1)}{3} \\ -\dfrac{4^n - 1}{3} & \dfrac{2(4^n - 1)}{3} + 1 \end{pmatrix};$$

$M = A + I$, en donde $A^2 = 5A$, y

$$M^n = \frac{A}{5}[6^n - 1] + I = \begin{pmatrix} \dfrac{3(6^n - 1)}{5} + 1 & -\dfrac{6(6^n - 1)}{5} \\ -\dfrac{(6^n - 1)}{5} & \dfrac{2(6^n - 1)}{5} + 1 \end{pmatrix};$$

$M = A + I$, en donde $A^2 = 10A$, y

$$M^n = \frac{A}{10}[11^n - 1] + I = \begin{pmatrix} \dfrac{3(11^n - 1)}{5} + 1 & \dfrac{3(11^n - 1)}{10} \\ \dfrac{4(11^n - 1)}{5} & \dfrac{2(11^n - 1)}{5} + 1 \end{pmatrix};$$

$M = A + I$, en donde $A^2 = 8A$, y

$$M^n = \frac{A}{8}[9^n - 1] + I = \begin{pmatrix} \dfrac{3(9^n - 1)}{4} + 1 & \dfrac{-(9^n - 1)}{4} \\ -\dfrac{3(9^n - 1)}{4} & \dfrac{9^n - 1}{4} + 1 \end{pmatrix};$$

$M = A - I$, en donde $A^2 = 3A$, y

$$M^n = \frac{A}{3}[2^n + (-1)^{n+1}] + (-1)^n I =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n & -\dfrac{2(2^n + (-1)^{n+1})}{3} \\ -\dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} & \dfrac{2(2^n + (-1)^{n+1})}{3} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

4.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y, al hacer } A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (por recurrencia);}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y, al hacer } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

con
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1 + (-1)^n 2^{n+1}}{3}, \\ b_n = \dfrac{1 + (-1)^{n-1} 2^n}{3}. \end{cases}$$

$$A_1 = aA \quad \text{y} \quad A_1^n = a^n \cdot A^n$$
$$B_1 = aB \quad \text{y} \quad B_1^n = a^n \cdot B^n,$$
$$C_1 = aC \quad \text{y} \quad C_1^n = a^n \cdot C^n$$

6. En todo lo que sigue los escalares k son números reales cualesquiera.

a) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$: $\quad \lambda_1 = 1 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 3 \quad$ y $\quad x_2 = k\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$: $\quad \lambda_1 = 5 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -1 \quad$ y $\quad x_2 = k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$: $\lambda_1 = -2$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 8$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$: $\lambda_1 = 2$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 6$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$: $\lambda_1 = 2$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 9$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

f) $\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0$: $\lambda_1 = 8$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -4$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

g) $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = 4$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

h) $\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$: $\lambda_1 = 8$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

i) $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$: $\lambda_1 = 7$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

j) $\lambda^2 - 9 = 0$: $\lambda_1 = 3$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -3$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

k) $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 6$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

l) $\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$: $\lambda_1 = 7$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -3$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

m) $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$: $\lambda_1 = 8$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -2$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

n) $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$: $\lambda_1 = 9$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$.

o) $\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$: $\lambda_1 = 11$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

p) $\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0$: $\lambda_1 = 4$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -6$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

q) $\lambda^2 - 7\lambda - 30 = 0$: $\lambda_1 = 10$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -3$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

r) $\lambda^2 - 11\lambda - 12 = 0$: $\lambda_1 = 12$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -1$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$.

s) $\lambda^2 - \lambda - 56 = 0$: $\lambda_1 = -7$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 8$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

t) $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$: $\lambda_1 = 1$ y $x_1 = k\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 5$ y $x_2 = k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$u)$ $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$: $\quad \lambda_1 = 5$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -3$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$v)$ $\lambda^2 - 100 = 0$: $\quad \lambda_1 = 10$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -10$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$w)$ $\lambda^2 - 2\lambda - 99 = 0$: $\quad \lambda_1 = 11$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -9$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$x)$ $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$: $\quad \lambda_1 = 3$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -2$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$y)$ $\lambda^2 - 25 = 0$: $\quad \lambda_1 = 5$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -5$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$z)$ $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$: $\quad \lambda_1 = 1$ y $x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = -4$ y $x_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$a)$ $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ o bien $(1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ y las tres familias de vectores propios son:

$$x_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ correspondiente a } \lambda_1 = 1,$$

$$x_2 = k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ correspondiente a } \lambda_2 = 2,$$

$$x_3 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ correspondiente a } \lambda_3 = 3.$$

7. α)

a) $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$: $\quad \lambda_1 = 5 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -3 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

b) $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$: $\quad \lambda_1 = 5 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

c) $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$: $\quad \lambda_1 = 9 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

d) $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$: $\quad \lambda_1 = 6 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

e) $\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$: $\quad \lambda_1 = 7 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -3 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

f) $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$: $\quad \lambda_1 = 8 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

g) $\lambda^2 - 11\lambda - 12 = 0$: $\quad \lambda_1 = 12 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

h) $\lambda^2 - \lambda - 56 = 0$: $\quad \lambda_1 = 8 \quad$ y $\quad x_1 = k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = -7 \quad \text{y} \quad x_2 = k\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}; \quad x_1 x_2' = 0.$$

i) $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$ y las 3 familias de vectores propios son:

$$x_1 = k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{correspondiente a} \quad \lambda_1 = 3,$$

$$x_3 = k\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \quad \text{correspondiente a} \quad \lambda_2 = 5,$$

$$x_2 = k\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{correspondiente a} \quad \lambda_3 = 0.$$

Se tiene $x_1 \cdot x_2' = 0$; $x_1 \cdot x_3' = 0$ y $x_2 \cdot x_3' = 0$, los vectores son ortogonales dos a dos.

β) Las matrices $\boldsymbol{P}$ están formadas por la yuxtaposición de los vectores propios de longitud *uno* de las matrices $\boldsymbol{M}$ correspondientes.

a) $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

b) $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

c) $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

d) $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

e) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

f) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

g) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3\sqrt{13}}{13} & \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ \dfrac{2\sqrt{13}}{13} & \dfrac{3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

h) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$.

i) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Los términos no nulos de las matrices diagonales $\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P}$ son los valores propios de la matriz $\boldsymbol{M}$; los vectores columnas de cada matriz $\boldsymbol{P}$ son los vectores propios de longitud *uno* de la matriz $\boldsymbol{M}$ correspondiente; como esos vectores columnas son ortognales y de longitud *uno*, las matrices $\boldsymbol{P}$ son ortogonales, es decir que $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}'$.

CALCULO INTEGRAL

I. INTEGRAL DE RIEMANN.

A) Definición: Dada una función numérica $x \multimap\!\!\rightarrow f(x)$ continua sobre un segmento $[a, b]$, a toda partición de $[a, b]$ se asocia

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\,\Delta_i\, x \qquad \text{en donde} \qquad \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

S_n depende de la partición y de las ζ_i.

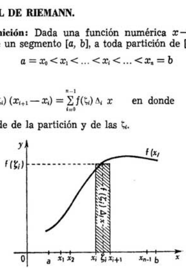


FIG. 31

Si la suma S_n tiene un límite independiente de la partición y de las ζ_i elegidas, cuando $\max |x_{i+1} - x_i| \to 0$, se dice que la función es integrable sobre el segmento $[a, b]$, expresándose

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max |x_{i+1} - x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(\zeta_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

$\Big[$El «signo integral» $\int$ sustituye al signo Σ y la diferencial dx reemplaza a las diferencias finitas $\Delta_i\, x = x_{i+1} - x_i \Big]$.

B) Propiedades de la operación integral $f \multimap \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

La integración es una forma lineal sobre el espacio vectorial de las funciones numéricas integrables, es decir, que para todo par de funciones numéricas f y g integrables sobre $[a\ b]$ se tiene

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\lambda \in \mathbf{R} \text{ y } \forall\mu \in \mathbf{R}.$$

Además se tienen las relaciones siguientes:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall c \in]a\ b[$$

y $$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

C) Método práctico para el cálculo de integrales.

1. *Integración de funciones cuyas primitivas son conocidas:* si una función $F(x)$ tiene por derivada la función $f(x)$, se dice que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y se tiene

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$	$F(x) = \int f(u)\,\mathrm{d}u$
$x^k \quad \forall k \neq -1$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C$ (C es una constante)
$\dfrac{1}{x}$	$\log_e \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x \quad \forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\log_e a} + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arc\,tg} x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$

2. *Cambio de variable:*

Si $x = \varphi(t)$, en donde φ es una función *monótona* (creciente o decreciente) entre los valores α y β tales que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$, se tiene

$$dx = \varphi'(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Para las integrales de las fracciones racionales en sen x, cos x y tg x se suele hacer el cambio de variable tg $x/2 = t$, pues

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Entonces se tiene $dx = 2\,dt/(1+t^2)$, pues $\operatorname{tg} x/2 = t$ implica $x/2 = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t$ o bien $x = 2 \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t$.

3. *Integración por partes:*

Si u y v son dos funciones diferenciables de x, se obtiene al integrar los dos miembros de la identidad $d[uv] = u\,dv + v\,du$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Esta fórmula de integración por partes se emplea siempre que $v\,du$ tiene una primitiva más sencilla *que* $u\,dv$.

II. INTEGRAL DE STIELTJES.

A) Definición: Dada una función numérica $f(x)$ continua sobre un segmento $[a\,b]$ y una función de distribución $x \multimap N(x)$, se asocia a toda partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\,[N(x_{i+1}) - N(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\,\Delta_i N(x),$$

que depende también de las ζ_i.

Si la suma S_n tiene un límite independiente de la partición y de las ζ_i elegidas, cuando $\max|x_{i+1} - x_i| \to 0$, se dice que la función f es integrable sobre el segmento $[a\ b]$ expresándose por

$$\int_a^b f(x)\,dN = \lim_{\max|x_{i+1}-x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\,[N(x_{i+1}) - N(x_i)].$$

Si la función N es derivable y tiene por derivada la función n, se tiene $\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}x$, y la integral de Stieljes

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}N = \int_a^b f(x)\,n(x)\,\mathrm{d}x$$

es una integral de Riemann.

B) Integración por partes.

Dadas dos funciones $x \multimap f(x)$ y $x \multimap g(x)$ tales que las dos integrales de Stieljes

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

estén definidas, se tiene la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

Si la función $x \multimap f(x)$ es diferenciable: $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, la integral

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f\,(x) = \int_a^b g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x$$

es una integral de Riemann, pasando así de una integral de Stieljes a una de Riemann.

C) Función generatriz de una variable aleatoria X.

Dada una variable aleatoria $\mathbf{X}$ de función de distribución F, definida por $x \multimap F(x) = \text{Prob}\ [\mathbf{X} < x]$, se llama función generatriz de $\mathbf{X}$ a la función

$$u \multimap g_{\mathbf{X}}(u) = \mathrm{E}(u^{\mathbf{X}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^x\,\mathrm{d}F(x).$$

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son dos variables aleatorias independientes que tienen por función generatriz $g_{\mathbf{X}}(u)$ y $g_{\mathbf{Y}}(u)$, su suma $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ tiene por función generatriz

$$g_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(u) = g_{\mathbf{X}}(u) \cdot g_{\mathbf{Y}}(u).$$

III. INTEGRALES DOBLES.

A) Definición: Dada una función de dos variables

$$(x, y) \multimap f(x, y) = f(M)$$

continua sobre un dominio plano conexo, a toda partición de $\mathcal{D}$ en n dominios $\mathcal{D}_i$ de superficie $\Delta_i = \Delta x\, \Delta y$ se asocia la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i') \Delta_i, \quad \text{en donde} \quad M_i' \in \mathcal{D}_i$$

S_n depende de la partición y de las M_i'.

Si la suma S_n tiene un límite independiente de la partición y de las M_i' elegidas, cuando $\max |\Delta_i| \to 0$ se dice que la función f es integrable, escribiéndose

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, \mathrm{d}M = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lim_{\max |\Delta_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i') \Delta_i.$$

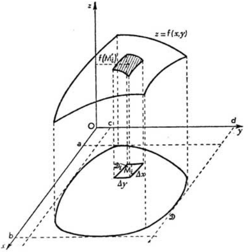


FIG. 32

B) Cambio de variables.

Si $x = \varphi(u, v)$ e $y = \psi(u, v)$ son dos funciones monótonas, y derivables, se tiene

$$dx\,dy = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{matrix}\right| du\,dv$$

$$\text{y} \quad \iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}'} f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)] \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right| du\,dv,$$

en donde:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} \right|,$$

que es el valor absoluto del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

y se llama *jacobiano*.

En particular, si se pasa de coordenadas cartesianas a polares ρ y θ definidas por $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ el jacobiano es

$$\left|\begin{matrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{matrix}\right| = \rho(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = \rho.$$

PROBLEMA VI

1) Calcular las derivadas de las funciones:

a) $y = x^5;\ y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}};\ y = \sqrt[3]{x^2+5};\ y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3x^3+1}}.$

b) $y = \mathrm{e}^x;\ y = \mathrm{e}^{5x};\ y = \mathrm{e}^{-x^2/2};\ y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}};$

$y = 3^x;\ y = a^x;\ y = 10^{x^2};\ y = 5^{\sqrt{x}}.$

c) $y = \log_e x;\ y = \log_5 x;\ y = \log_e(ax^2 + bx + c);$

$y = x\log_e x;\ y = \mathrm{e}^x \cdot \log_e x.$

2) Calcular las integrales:

a) $\int x^3\,\mathrm{d}x;\ \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2};\ \int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x;\ \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}};$

$\int \dfrac{\sqrt[5]{x}}{x^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x;\ \int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x;\ \int \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x;\ \int 3^x\,\mathrm{d}x.$

b) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x};\ \int \dfrac{n\,\mathrm{d}x}{x};\ \int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x;\ \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5};\ \int \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x.$

c) $\int \left(x^3 + \dfrac{2}{x} + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x;\ \int \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2 + \dfrac{5}{x}\right)\mathrm{d}x;$

$\int \left(2\,\mathrm{e}^{2x+3} + \dfrac{3}{x}\right)\mathrm{d}x;\ \int \left(4^x + \dfrac{1}{x} + x^3\right)\mathrm{d}x.$

3) Calcular las integrales definidas:

$\int_1^3 x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x;\ \int_2^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2};\ \int_1^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}};\ \int_0^4 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x;$

$\int_1^3 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x;\ \int_2^5 2^x\,\mathrm{d}x;\ \int_1^e \dfrac{\mathrm{d}x}{x};\ \int_{1/e}^{e^2} 3\,\dfrac{\mathrm{d}x}{x}.$

4) Calcular, realizando un cambio de variable sencillo, las integrales:

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)^3};\quad \int \frac{3x^2+5}{x^3+5x+4}\,dx;\quad \int (3x^2-2x+1)\sqrt[5]{x^3-x^2+x}\,dx;$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx;\quad \int \frac{dx}{4+x^2};\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2};\quad \int \frac{2x}{a^2+x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{2x+1}{a^2+x^2}\,dx;\quad \int \operatorname{tg} x\,dx;\quad \int \operatorname{cotg} x\,dx.$$

5) Haciendo $\operatorname{tg} x/2 = t$, calcular las primitivas:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x};\quad \int \frac{dx}{\cos x};\quad \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x};\quad \int \frac{dx}{1+\cos x};\quad \int \frac{dx}{5+4\cos x}$$

6) Descomponiendo las fracciones racionales en expresiones simples, calcular:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3};\quad \int \frac{x^3\,dx}{x^2-2x-3};\quad \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)};$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1};\quad \int \frac{dx}{x^2-a^2};\quad \int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2}$$

7) Integrar por partes las integrales siguientes:

a) $\int \log_e x\,dx;\quad \int x\,e^x\,dx;\quad \int x \operatorname{sen} x\,dx;\quad \int x\cos x\,dx;\quad \int x\,e^{ix}\,dx;$

b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx;\quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx;\quad \int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,dx;\quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx;$

$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx.$

8) Se considera la función Γ que asocia a todo número real positivo el número $\Gamma(\alpha)$ definido por la integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx.$$

a) Integrando por partes $\Gamma(\alpha+1)$, demostrar que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ para todo número real α positivo.

b) Calcular $\Gamma(1)$ y deducir $\Gamma(n+1)$ para n entero positivo.

c) Dados dos números reales positivos α y β, expresar $\Gamma(\alpha)$ y $\Gamma(\beta)$ respectivamente en función de las variables t y u deducidas de la variable x por las relaciones $x = t^2$ y $x = u^2$.

d) Haciendo $t = \rho \cos \theta$ y $u = \rho \operatorname{sen} \theta$, calcular el producto $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$ en función de $\Gamma(\alpha + \beta)$ y de una integral $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\,d\theta$, siendo $f(\theta)$ una función periódica a determinar.

e) Se considera la función B que asocia a todo par de números reales positivos (α, β) el número $B(\alpha, \beta)$ definido por la integral

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Haciendo $x = \cos^2 \theta$, calcular $B(\alpha, \beta)$ en función de θ y comparar este resultado con la integral $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\,d\theta$ obtenida en d). Deducir primero la expresión de $B(\alpha, \beta)$ en función de $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta)$ y $\Gamma(\alpha + \beta)$, y luego la de $B(n + 1, p + 1)$ para n y p enteros positivos.

f) Utilizando la expresión de $B(\alpha, \beta)$ en función de θ obtenida en e) calcular $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

g) Calcular el valor de $\Gamma\ (\frac{1}{2})$, y después el de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$.

9) Calcular las integrales múltiples siguientes:

a) $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$,

en donde $\quad \mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x - 2y \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}$;

b) $\iiint_{\mathcal{D}} xyz\,dx\,dy\,dz$,

en donde $\quad \mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ y } x + y + z \leqslant 1\}$;

c) $\iiint_{\mathcal{D}} e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy\,dz$,

en donde $\quad \mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z\}$;

d) $\iint \cdots \int \quad e^{-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$,

en donde $\quad \mathcal{D} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$;

e) $\iiint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy\,dz$, en donde $\mathscr{D} = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ y } x + y + z \leqslant 1\}$.

10) *a*) Demostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$.

b) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$

haciendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$.

c) Deducir la expresión de $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ y la de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$

d) Se supone que una variable aleatoria continua X definida sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$ tiene por densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. ¿Es cierto? ¿Por qué?

* *e*) Integrando por partes calcular $E(X)$; $E(X^2)$; $\mathrm{Var}(X)$ y σ_X.

11) Una variable aleatoria continua que puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$ tiene por densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{a} e^{-x/a}$, en donde $a > 0$.

a) Verificar que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

b) Calcular $E(X)$ y $E(X^2)$ y deducir $\mathrm{Var}(X)$ y σ_X.

c) Deducir de *b*) la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica de una variable aleatoria continua X que toma todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$, y tiene por densidad de probabilidad $f(x) = e^{-x}$.

d) Calcular $E(X^n)$ cuando X tiene por densidad de probabilidad $f(x) = e^{-x}$, en donde n es un entero positivo.

e) Haciendo $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\,dx$. Calcular $\Gamma(1/2)$ con la ayuda del resultado del 10-*c*).

Deducir una expresión para $\Gamma = (n/2)$ cuando n es un entero impar.

(*) Se escribe $E(X) = \int_a^b xf(x)\,dx$ y $E(X^h) = \int_b^a x^h f(x)\,dx$ si X es una variante continua de densidad de probabilidad $f(x)$ y que toma sus valores sobre el intervalo $]a\ b]$.

12) La variable aleatoria χ^2 que puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$ sigue «una distribución χ^2 con n grados de libertad» cuando su densidad de probabilidad es:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,d(\chi^2)$$

a) Verificar que $\int_0^{+\infty} f(\chi^2)\,d\chi^2 = 1$.

b) Calcular $E(\chi^2)$ y $E[(\chi^2)^2]$; deducir $\mathrm{Var}(\chi^2)$ y σ_{χ^2}.

13) Se considera la función $x \longrightarrow F(x)$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ x^3 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 0{,}2, \\ 0{,}4 & \text{si} \quad 0{,}2 < x \leqslant 0{,}4, \\ x & \text{si} \quad 0{,}4 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

a) Verificar que $F(x)$ se puede considerar como la función de distribución de una variable aleatoria continua X que toma sus valores sobre el intervalo [0 1]. Dibujar la curva representativa de la función F.

b) Calcular la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X que tiene por función de distribución F.

c) Calcular la función generatriz de la variable aleatoria X.

14) Sea N el tamaño de la población activa de un país dado. La subpoblación $F(x)$ que tiene una renta anual inferior a x viene dada por la distribución de Pareto

$$F(x) = N\left(1 - \frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

en donde x se expresa en unidades monetarias ($x = 1$ para el salario mínimo).

a) Calcular el valor medio de las rentas individuales superiores a x.

b) Igual cuestión cuando se considera la distribución de Pareto más general

$$F(x) = N(1 - x^k), \text{ en donde } k < -1.$$

15) Se considera el par de variables aleatorias (X, Y) que toman sus valores en el dominio $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

a) Determinar la constante K para que $f(x, y) = K\,xy\,e^{-(x^2+y^2)/2}$ sea la densidad de probabilidad del par (X, Y).

18

b) Determinar las densidades de probabilidad $a(x)$ y $b(y)$ de las distribuciones marginales de X y de Y. ¿Las variables aleatorias X e Y son independientes?

c) Determinar las densidades de probabilidad $a^y(x)$ y $b^x(y)$ de las distribuciones condicionales de X (por y) y de Y (por x).

d) Calcular $E(X)$, $E(Y)$ y $E(X + Y)$.

e) Calcular $E(X^2)$ y $E(Y^2)$. Deducir Var (X), σ_X, Var (Y) y σ_Y.

Soluciones:

1. La derivada de una función $x \multimap y = f(x)$ se expresará indiferentemente por y' o por $\frac{dy}{dx}$. Para calcular las derivadas de las derivadas de las funciones que siguen se utilizan las relaciones:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{de^x}{dx} = e^x; \quad \frac{d[\log_e x]}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{d[u(x)\,v(x)]}{dx} = v\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dv}{dx}; \quad \frac{d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]}{dx} = \frac{1}{v^2}\left[v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}\right];$$

$$y = y[u(x)] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{(fórmula de Leibnitz).}$$

a) $\frac{dx^5}{dx} = 5\,x^4$; $\frac{d\frac{1}{x\sqrt{x}}}{dx} = -\frac{3}{2\,x^2\,\sqrt{x}}$;

$$y = \sqrt[3]{u}, \text{ con } u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}\,u^{-2/3}\cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}};$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{u}}, \text{ con } u = 3\,x^3 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{5\,u\sqrt[3]{u}}\cdot 9\,x^2 = \frac{-9\,x^2}{5(3\,x^3+1)\sqrt[3]{3\,x^3+1}};$$

b) $\dfrac{de^x}{dx}e^x$; $\dfrac{de^{5x}}{dx} = 5\,e^{5x}$;

$$y = e^u \quad \text{con} \quad u = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u(-x) = -x\,e^{-x^2/2};$$

$$y = e^u \quad \text{con} \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}};$$

$$\log_e 3^x = x\log_e 3 \Rightarrow 3^x = e^{x\log_e 3}\,[\text{pues } \log_e a = b \Leftrightarrow a = e^b],$$

o sea

$$y = e^u \quad \text{con} \quad u = x\log 3 \ \text{ y } \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u\cdot\log_e 3$$
$$= e^{x\log_e 3}\cdot\log_e 3 = 3^x\log_e 3;$$

$$\log_e a^x = x\log_e a \Rightarrow a^x = e^{x\log_e a}, \quad \text{o sea} \quad y = e^u, \quad \text{con} \quad u = x\log_e a$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u\cdot\log_e a = e^{x\log_e a}\cdot\log_e a = a^x\cdot\log_e a;$$

$y = 10^u$, con $u = x^2$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 10^u\cdot\log_e 10\cdot 2x = 2x\,10^{x^2}\log_e 10;$$

$y = 5^u$, con $u = \sqrt{x}$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 5^u\cdot\log_e 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\log_e 5;$$

c) $\dfrac{d[\log_e x]}{dx} = \dfrac{1}{x}$; $\log_5 x = \dfrac{\log_e x}{\log_e 5} \Rightarrow \dfrac{d[\log_5 x]}{dx} = \dfrac{1}{x\log_e 5} = \dfrac{1}{\log_e 5^x}$;

$$y = \log_e u, \quad \text{con} \quad u = ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{u}(2ax + b) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[x\log_e x]}{dx} = \frac{dx}{dx}\cdot\log_e x + x\frac{d[\log_e x]}{dx} = \log_e x + 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[e^x \log_e x]}{dx} = \frac{de^x}{dx} \log_e x + e^x \cdot \frac{d[\log_e x]}{dx}$$

$$= e^x \log_e x + \frac{e^x}{x} = e^x \left[\log_e + \frac{1}{x}\right].$$

2. *a*) $\int x^5\, dx = \frac{x^6}{6} + C; \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C;$

$$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{3/2}\, dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\, dx = 2\sqrt{x} + C;$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}}{x^2 \sqrt{x}}\, dx = \int x^{-23/10}\, dx = -\frac{10}{13} x^{-13/10} + C; \int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + C;$$

$$\int e^{x/2}\, dx = 2\, e^{x/2} + C; \int 3^x\, dx = \frac{3^x}{\log_e 3} + C.$$

En todo lo que precede y en lo que sigue, C representa una constante.

b) $\int \frac{dx}{x} = \log_e |x| + C; \int \frac{n\, dx}{x} = n \log_e |x| + C = \log_e |x|^n + C;$

$$\int 2\, x\, e^{x^2} dx = \int u'\, e^u\, du = e^u + C = e^{x^2} + C \qquad \text{(haciendo } u = x^2\text{)};$$

$$\int \frac{dx}{x+5} = \log_e |x+5| + C;$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\, dx = \int \frac{u'}{u}\, du = \log_e |u| + C = \log_e |x^2+x+3| + C$$

(haciendo $u = x^2 + x + 3$).

c) $\int \left(x^3 + \frac{2}{x} + e^x\right) dx = \int x^3\, dx + \int \frac{2\, dx}{x} + \int e^x\, dx$

$$= \frac{x^4}{4} + \log_e |x|^2 + e^x + C;$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\,x^2 + \frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int 3\,x^2\,\mathrm{d}x + \int\frac{5\,\mathrm{d}x}{x}$$

$$= 2\,\sqrt{x} + x^3 + \log_e|\,x\,|^5 + C;$$

$$\int\left(2\,e^{2x+3} + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x = e^{2x+3} + \log_e|\,x\,|^3 + C;$$

$$\int\left(4^x + \frac{1}{x} + x^3\right)\mathrm{d}x = \int 4^x\,\mathrm{d}x + \int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^3\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4^x}{\log_e 4} + \log_e|\,x\,| + \frac{x^4}{4} + C;$$

3. Puesto que, si una función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

se tiene:

$$\int_1^8 x\,\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^8 x^{4/3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{7/3}}{7/3}\right]_1^8 = \frac{3}{7}\,(8^{7/3} - 1) = \frac{3\cdot 127}{7} = \frac{381}{7};$$

$$\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_2^5 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^5 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10};$$

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\,\sqrt{x}} = \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} = \int_1^4 x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \left[-2\,x^{-1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^4$$

$$= -1 + 2 = 1:$$

$$\int_0^4 e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1 = 53{,}596$$

$$\int_1^3 e^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_1^3 = \frac{e^9 - e^3}{3} = \frac{8\,102{,}33 - 20{,}08}{3} = \frac{8\,082\,25}{3} = 2\,694{,}08;$$

$$\int_2^5 2^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2^x}{\log_e 2}\right]_2^5 = \frac{2^5 - 2^2}{\log_e 2} = \frac{32 - 4}{0{,}693\,15} \approx 40{,}395:$$

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\log_e x]_1^e = \log_e e - \log_e 1 = 1;$$

$$\int_{1/e}^{e^2} 3\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = 3[\log_e x]_{1/e}^{e^2} = 3\left[\log_e e - \log_e\frac{1}{e}\right] = 3[2 - (-1)] = 9.$$

4. Haciendo $1 + x = u$, se tiene $x = u - 1$, $dx = du$ y se obtiene

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)^3} = \int \frac{u-1}{u^3}\,du = \int \frac{u}{u^3}\,du - \int \frac{du}{u^3} = \int \frac{du}{u^2} - \int \frac{du}{u^3}$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{-2u+1}{2u^2} + C$$

$$= \frac{-2(1+x)+1}{2(1+x)^2} + C = -\frac{1+2x}{2(1+x)^2} + C;$$

al hacer $x^3 + 5x + 4 = u$, se tiene $u' = 3x^2 + 5$ y se obtiene

$$\int \frac{3x^2+5}{x^3+5x+4}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log_e |u| + C = \log_e |x^3+5x+4| + C;$$

al hacer $x^3 - x^2 + x = u(x)$, se tiene $u'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ y se obtiene

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\sqrt[5]{x^3 - x^2 + x}\,dx = \int u'(x)\sqrt[5]{u(x)}\,dx = \frac{5}{6}u\sqrt[5]{u} + C$$

$$= \frac{5(x^3-x^2+x)\sqrt[5]{x^3-x^2+x}}{6} + C;$$

al hacer $ax^2 + bx + c = u$, se tiene $u' = 2ax + b$ y se obtiene

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log_e |u| + C = \log_e |ax^2+bx+c| + C;$$

al hacer $x/2 = t$, se tiene $x = 2t$, $x^2 = 4t^2$, $dx = 2\,dt$ y se obtiene

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{2\,dt}{4+4t^2} = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,t + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{2} + C;$$

al hacer $x/a = t$, se tiene $x = at$, $x^2 = a^2t^2$, $dx = a\,dt$ y se obtiene

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\,dt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,tg}\,t + C = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{a} + C;$$

al hacer $a^2 + x^2 = u$, se tiene $u' = 2x$ y se obtiene

$$\int \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} = \int \frac{u'\,dx}{u} = \log_e |u| + C = \log_e |a^2 + x^2| + C,$$

de aquí se deduce que

$$\int \frac{2x+1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} + \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \log_e |a^2+x^2| + \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a} + C;$$

al hacer $\cos x = u$, se tiene $u' = -\operatorname{sen} x$ y se obtiene

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = -\log_e |u| + C$$

$$= \log_e \frac{1}{|u|} + C = \log_e \frac{1}{|\cos x|} + C;$$

al hacer $\operatorname{sen} x = u$, se tiene $u' = \cos x$ y se obtiene

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log_e |u| + C = \log_e |\operatorname{sen} x| + C.$$

5. Cuando se hace $tg\, x/2 = t$, se sabe que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{y} \qquad x = 2\operatorname{Arc\,tg} t,$$

o sea:

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

De aquí resulta que

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{2\,dt/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \log_e |t| + C = \log_e \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt/(1+t^2)}{(1-t^2)/(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \frac{2\,dt}{(1-t)(1+t)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t-1} = \log_e |1+t| - \log_e |t-1| + C$$

$$= \log_e \left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

o bien:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log_e \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} \right| + C = \log_e \left| \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} \right| + C$$

$$= \log_e \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C \quad \text{pues } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1 + t^2 + 2t} = \int \frac{2\,dt}{(1 + t)^2}$$

$$= \frac{-2}{t + 1} + C = \frac{-2}{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 1} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}{1 + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{2\,dt}{2} = \int dt = t + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{5 + 4\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}{\dfrac{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2)}{1 + t^2}} = \int \frac{2\,dt}{9 + t^2} = \frac{2}{9} \int \frac{dt}{1 + \dfrac{t^2}{9}}$$

$$= \frac{2}{9} \int \frac{3\,d(t/3)}{1 + (t/3)^2} = \frac{6}{9} \operatorname{Arc\,tg} \frac{t}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x/2}{3} \right) + C.$$

6. Las funciones

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{A}{ax^2 + bx + c};$$

en donde A, a, b y c son constantes, tienen una primitiva. Tres casos se distinguen:

— el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene un discriminante $\Delta = b^2 - 4\,ac$ negativo y se expresa por

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4\,ac-b^2}{4\,a^2}\right]=a(u^2+k)=ak\left(\frac{u^2}{k}+1\right),$$

con $u = x + b/2\,a$ y $k = -\Delta/4\,a^2 > 0$; se tiene entonces:

$$\int\frac{A\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{ak}\int\frac{du}{\dfrac{u^2}{k}+1}=\frac{A}{a\sqrt{k}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{k}}+C$$

$$=\frac{A}{a\sqrt{k}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2\,ax+b}{2\,a\sqrt{k}}+C;$$

— el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene un discriminante $\Delta = b^2 - 4\,ac$ nulo y se expresa por $a(x + b/2\,a)^2$; se tiene, pues:

$$\int\frac{A\,dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{A\,dx}{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}=-\frac{A}{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)}+C$$

$$=-\frac{2\,A}{2\,ax+b}+C;$$

— el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene un discriminante $\Delta = b^2 - 4\,ac$ positivo y se expresa por $a(x - x')\,(x - x'')$ con

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad \text{y}\quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};$$

luego se tiene:

$$\int\frac{A\,dx}{a(x-x')\,(x-x'')}=\frac{A}{a}\int\frac{dx}{(x-x')\,(x-x'')}$$

$$=\frac{A}{a(x'-x'')}\int\left(\frac{1}{x-x'}-\frac{1}{x-x''}\right)dx$$

$$=\frac{A}{a(x'-x'')}\log_e\left|\frac{x-x'}{x-x''}\right|+C.$$

Se establece la relación

$$\frac{1}{(x-x')(x-x'')}=\frac{1}{x'-x''}\left[\frac{1}{x-x'}-\frac{1}{x-x''}\right]$$

descomponiendo la expresión $\dfrac{1}{(x-x')(x-x'')}$ en *fracciones simples*

$$\frac{A}{(x-x')}+\frac{B}{(x-x'')}$$

Como

$$\frac{A}{x-x'}+\frac{B}{x-x''}=\frac{A(x-x'')+B(x-x')}{(x-x')\,(x-x'')}$$

la identidad

$$\frac{1}{(x-x')(x-x'')}=\frac{A(x-x'')+B(x-x')}{(x-x')\,(x-x'')}$$

implica la relación $1=A(x-x'')+B(x-x')$ para todo x real. Para $x=x'$, la identidad anterior se expresa por $1=A(x'-x'')$, o sea $A=1/(x'-x'')$. Para $x=x''$ se expresa la identidad por $1=B(x''-x')$, o sea $B=1/(x''-x')=-A$ y finalmente

$$\frac{1}{(x-x')(x-x'')}=\frac{1}{x'-x''}\left[\frac{1}{x-x'}-\frac{1}{x-x''}\right].$$

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{dx}{(x-3)\,(x-1)}=\frac{1}{3-1}\left[\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_e\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C=\log_e\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|}+C.$$

Para calcular $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{x^2-2x-3}$, se descompone la fracción racional $x^3/(x^2-2x-3)$ en una suma de tres términos:

— su parte entera que es un polinomio de primer grado;

— un múltiplo $k(2x-2)$ de la derivada del denominador x^2-2x-3, para utilizar la relación

$$\int\frac{k(2x-2)}{x^2-2x-3}\,dx=k\log_e|x^2-2x-3|+C;$$

— una expresión de la forma $A/(x^2-2x-3)$ que se descompone en fracciones simples.

Al efectuar el cociente de x^3 por x^2-2x-3:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3+2x^2+3x} & x+2 \\ 2x^2+3x & \\ \underline{-2x^2+4x+6} & \\ 7x+6 & \end{array}$$

se puede escribir

$$\frac{x^3}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{7x+6}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{{}^7/_2(2x-2)}{x^2-2x-3}+\frac{13}{x^2-2x-3};$$

o sea

$$\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}=\int x\,\mathrm{d}x+\int 2\,\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{7}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x+13\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{2}\log_e|x^2-2x-3|+\frac{13}{4}\log_e\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C,$$

ya que

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\log_e\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-b}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\log_e\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C=\log_e\left|\frac{x-a}{x-b}\right|^{1/(a-b)}+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{1-(-1)}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_e\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=\log_e\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{a-(-a)} \left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right|^{1/2a} + C;$$

como

$$\frac{x^2}{x^2-a^2} = \frac{x^2-a^2+a^2}{x^2-a^2} = 1 + \frac{a^2}{x^2-a^2}$$

se tiene

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2} = \int dx + a^2 \int \frac{dx}{x^2-a^2} = x + a^2 \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right|^{1/2a} + C$$

$$= x + \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right|^{a/2} + C$$

7. a) Haciendo $\begin{cases} dv = dx \\ u = \log_e x \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{x}, \\ v = x, \end{cases}$

se obtiene:

$$\int \log_e x\,dx = x \log_e x - \int x \frac{dx}{x} = x \log_e x - x + C$$

$$= x(\log_e x - 1) + C;$$

haciendo $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x\,dx \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$, resulta:

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C;$$

haciendo $\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$,

se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C;$$

haciendo $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C;$$

haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{ix}\,dx \end{array}\right.$, lo que implica $\left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = \dfrac{e^{ix}}{i} = -ie^{ix} \end{array}\right.$

se obtiene: $\int e^{ix}\,dx = -ix\,e^{ix} + \int ie^{ix}\,dx = e^{ix}(-ix + 1) + C.$

Observación:

$$\int x\cos x\,dx + i\int x\,\text{sen}\,x\,dx = \int x\,e^{ix}\,dx = e^{ix}\,(1 - ix) + C,$$

es decir que $\int x\cos x\,dx$ es la parte real de $\int e^{ix}\,dx$ mientras que $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$ es su parte imaginaria. Como
$e^{ix}(1-ix) = (\cos x + i\,\text{sen}\,x)(1-ix) = \cos x + x\,\text{sen}\,x + i(\text{sen}\,x - x\cos x)$,
se tiene

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\,\text{sen}\,x \quad \text{y} \quad \int x\,\text{sen}\,x\,dx = \text{sen}\,x - x\cos x.$$

b) Para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\,\text{sen}\,x\,dx,$$

hagamos $\left\{\begin{array}{l} u = \text{sen}\,x \\ dv = \text{sen}\,x\,dx \end{array}\right.$, lo que implica $\left\{\begin{array}{l} du = \cos x\,dx, \\ v = -\cos x \end{array}\right.$

entonces, al integrar por partes, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = [-\text{sen}\,x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

ya que:

$$[-\text{sen}\,x\cos x]_0^{\pi/2} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,0\cos 0 = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \text{sen}^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = [x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx \quad \text{o bien} \quad 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = \pi/2,\end{aligned}$$

o sea:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4};$$

haciendo $\begin{cases} dv = e^{-x}\,dx \\ u = x \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x} \, dx = [-x\, e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

ya que:

$$[-x\, e^{-x}]_0^{\infty} = 0 \quad \text{y} \quad -e^{-\infty} = 0;$$

haciendo $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x}\,dx \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = 2\,x\,dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$, resulta:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2\,x\, e^{-x} \, dx = 2 \int_0^{\infty} x\, e^{-x} \, dx = 2,$$

ya que:

$$[-x^2 e^{-x}]_0^{\infty} = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} x\, e^{-x} \, dx = 1.$$

Para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx,$$

hagamos $\begin{cases} u = \operatorname{sen}^2 x \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$;

integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 dx &= [-\operatorname{sen}^2 x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \, dx, \end{aligned}$$

pues:

$$[-\operatorname{sen}^2 x \cos x]_0^{\pi/2} = -\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^2 0 \cos 0 = 0.$$

De aquí se deduce que

$$3\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 2\,[-\cos x]_0^{\pi/2} = 2,$$

o sea:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{2}{3}.$$

8. *a*) Haciendo $\begin{cases} u = x^\alpha \\ dv = e^{-x} \end{cases}$, lo que implica $\begin{cases} du = \alpha x^{\alpha-1}\, dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$,

se obtiene:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx = [x^\alpha e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^0 e^{-x} \alpha x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \alpha\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

ya que

$[-x^\alpha e^{-x}]_0^{+\infty} = 0$, $x^\alpha e^{-x}$ tiende a cero cuando x tiende a infinito.

Entonces se tiene

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}^+$$

b) $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{1-1}\, dx = \int^\infty e^{-x}\, dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 1$$

ya que e^{-x} tiende a cero cuando x tiende a infinito. Dando a α sucesivamente los valores n, $n-1$, $n-2$, ..., 2 y 1 en la relación

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ \Gamma(n) &= (n-1)\,\Gamma(n-1) \\ \Gamma(n-1) &= (n-2)\,\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ \Gamma(3) &= 2\,\Gamma(2) \\ \Gamma(2) &= 1\,\Gamma(1) \end{aligned}$$

o sea, multiplicando miembro a miembro esas n igualdades y después de simplificar

$$\Gamma(n + 1) = n(n-1)\,(n-2)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1) = n!$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}}.$$

c) Si se hace $x = t^2$, lo que implica $\mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t$, se tiene, ya que t es una función creciente en x que varía de 0 a $+\infty$ cuando x varía de 0 a $+\infty$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} (t^2)^{\alpha-1}\, 2\,t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2\alpha-1}\,\mathrm{d}t.$$

Análogamente, haciendo $x = u^2$:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} u^{2\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

Observamos que

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1}\,\mathrm{d}\rho,$$

esta última cantidad se deduce de la anterior por el cambio de variable $x = \rho^2$.

d)
$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) &= 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2\alpha-1}\,\mathrm{d}t\; 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} u^{2\beta-1}\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-u^2} t^{2\alpha-1} u^{2\beta-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(t^2+u^2)} t^{2\alpha-1} u^{2\beta-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,;
\end{aligned}$$

haciendo $\begin{cases} t = \rho\cos\theta \\ u = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$, en donde $0 \leqslant \rho < +\infty$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

se tiene
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial \rho} & \dfrac{\partial t}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \rho} & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{vmatrix} \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

y
$$t^2 + u^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = \rho^2,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) &= 4\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(t^2+u^2)} t^{2\alpha-1} u^{2\beta-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho^{2\alpha-1}\cos^{2\alpha-1}\theta\; \rho^{2\beta-1}\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\,\theta\;\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_{\rho=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho^{2\alpha+2\beta-1}\,\mathrm{d}\rho \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\cos^{2\alpha-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\,\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{\pi/2} 2\cos^{2\alpha-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

En particular

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^{2\alpha-1}\theta \operatorname{sen}^{2\beta-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

e) Haciendo $x = \cos^2\theta$ se tiene $dx = -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$ y

$$1 - x = 1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta;$$

como θ varía decreciendo de $\pi/2$ a 0, cuando x lo hace de 0 a 1, resulta:

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ &= -\int_{\pi/2}^0 \cos^{2(\alpha-1)}\theta \operatorname{sen}^{2(\beta-1)}\theta \cdot 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \operatorname{sen}^{2\beta-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{según } d), \end{aligned}$$

o sea

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

En particular, se tiene:

$$\begin{aligned} B(n+1, p+1) &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+2)} \\ &= \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{y} \quad \forall p \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

f) Ya que: $B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \operatorname{sen}^{2\beta-1}\theta \, d\theta$,

se deduce que en particular

$$\begin{aligned} B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\theta \operatorname{sen}^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\theta \, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} d\theta = 2[\theta]_0^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

g) De la relación $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, resulta que

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(1)} = [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2$$

Como $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$, se tiene:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx,$$

pues:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \text{ (ver pág. 295);}$$

haciendo $x^2/2 = t$, lo que implica $x = \sqrt{2t}$ y $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2t}}$, se obtiene

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,t^{1/2-1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi},$$

o sea:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

9. *a*) Para calcular $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$, en donde el dominio

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, x - 2y \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}$$

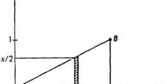


FIG. 33

viene representado por el triángulo $O\,A\,B$, se puede integrar con respecto a y sobre una banda paralela al eje Oy, variando y de 0 a $x/2$ y después integrar con respecto a x, que varía de 0 a 2 de tal manera que

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=2} x \int_{y=0}^{y=x/2} y\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x/2} dx$$
$$= \int_{x=0}^{x=2} x\cdot\frac{x^2}{8}\,dx = \left[\frac{x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Observación. — Para calcular $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$, se habría podido

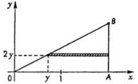


FIG. 34

integrar con respecto a x sobre una banda Ox, variando x de $2y$ a 2 e integrar después con respecto a y, variando ésta de 0 a 1, de tal manera que

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} y \int_{x=2y}^{x=2} x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2y}^{2} dy$$
$$= \int_{y=0}^{y=1} y(2-2y^2)\,dy = \int_0^1 2y\,dy - \int_0^1 2y^3\,dy$$
$$= \left[y^2\right]_0^1 - \left[\frac{y^4}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Para calcular

$$\iiint_{\mathcal{D}} xyz\,dx\,dy\,dz, \text{ en donde } \mathcal{D} = \{(x,y,z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ y } x+y+z \leqslant 1\},$$

se integra sucesivamente con respecto a z, que varía de 0 a $1-x-y$, a continuación con respecto a y, que varía de 0 a $1-x$, y finalmente con respecto a x, que varía de 0 a 1 de tal manera que

$$\iiint_{\mathscr{D}} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1-x} y \int_{z=0}^{z=1-x-y} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1-x} y \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1-x} y \left[\frac{(1-x-y)^2}{2}\right] \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1-x} \left[y\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{2(1-x)\,y^2}{2} + \frac{y^3}{2}\right] \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x \left\{\frac{(1-x)^2}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} - (1-x)\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} + \left[\frac{y^4}{8}\right]_0^{1-x}\right\} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\left[\frac{(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{8}\right]\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right]\int_0^1 x(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 u^4(1-u)\mathrm{d}u = \frac{1}{24}\left\{\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1\right\} = \frac{1}{24}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{720},$$

pues si en la integral $\int_0^1 x(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ se hace $1-x=u$, se tiene $x=1-u$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$ y u varía de 1 a 0 cuando x lo hace de 0 a 1, de tal manera que

$$\int_0^1 x(1-x)^4\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 (1-u)\,u^4\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^4(1-u)\,\mathrm{d}u.$$

c) Para calcular $\iiint_{\mathscr{D}} \mathrm{e}^{-(x+y+z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, en donde $\mathscr{D} = \{(x,y,z)\,|\,0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z\}$, se integra sucesivamente con respecto a z, que varía de y a $+\infty$, a continuación con respecto a y, que lo hace entre x y $+\infty$, y por último con respecto a x, que varía entre 0 y $+\infty$ de tal manera que

$$\iiint_{\mathcal{D}} e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\int_{y=x}^{+\infty} e^{-y}\int_{z=y}^{+\infty} e^{-z}\,dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\int_{y=x}^{+\infty} e^{-y}\left[-e^{-z}\right]_y^{+\infty} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\int_{y=x}^{+\infty} e^{-y}e^{-y}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\int_{y=x}^{+\infty} e^{-2y}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_x^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\frac{e^{-2x}}{2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}}{2}\,dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{2\cdot 3}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!}$$

d) Al integrar como en c), sucesivamente con relación a $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ y x_1, se establece por recurrencia que

$$\iint\cdots\int_{\mathcal{D}} e^{-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \frac{1}{n!},$$

en donde $\mathcal{D}\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\,|\,0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n\}$.

e) $$\iiint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{x=1} x\int_{y=0}^{y=1-x} y\int_{z=0}^{z=1-x-y} dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x\int_{y=0}^{y=1-x} y(1-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x\left\{(1-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}\right\} dx = \int_0^1 x\left[\frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{6}\,dx = \int_0^1 \frac{u^3(1-u)\,du}{6} = \frac{1}{6}\left\{\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1\right\} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{120}$$

10. a) Se sabe que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Ahora bien, si en la primera integral del segundo miembro se hace $t = -x$, lo que implica $dt = -dx$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

de donde resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

b) Haciendo $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$, lo que implica

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = \rho^2,$$

se tiene, ya que ρ varía entre 0 y $+\infty$ y θ de 0 a $\pi/2$ cuando x e y varían de 0 a $+\infty$:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dy$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho$$

pues:

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\rho\,d\theta = \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Calculemos $\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho$ haciendo $-\rho^2/2 = u$, lo que implica $u' = -\rho$. Entones se tiene:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho = \int_{0}^{+\infty} e^{u}(-u')\,du$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} u'\,e^{u}\,du = -\left[e^{u}\right]_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = -\left[e^{-\rho^2/2}\right]_{0}^{+\infty} = 1$$

y por consiguiente:

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot 1 = \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \frac{\pi}{2}$$

c) Como $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ (basta realizar el cambio de variable $y = x$).

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right]^2,$$

o sea

$$\left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right]^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

d) Una variable aleatoria continua X definida sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$ puede tener por densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ya que $f(x) > 0$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$$

La variable aleatoria X sigue una ley normal (o ley de Laplace-Gauss) y $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ representa el área rayada de la fig. 35.

Se tiene

$$P(X < t) = \prod(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx.$$

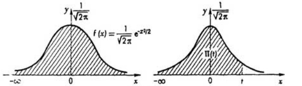


FIG. 35

Es el área comprendida entre el eje de las x, la curva $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ y la recta de ecuación $x = t$. Es un número comprendido entre 0 y 1. La cantidad $\Pi(t)$, en función de t, se obtiene por simple lectura en «la tabla de la función de distribución de la ley de Laplace-Gauss». (Ver un libro de Estadística, por ejemplo: Sixto Ríos. *Métodos Estadísticos.*)

e) La esperanza matemática de la variable aleatoria continua X, que tiene por densidad de probabilidad $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2/2}\,dx.$$

Haciendo $u = -x^2/2$, lo que implica $u' = -x$, se tiene:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -u'\,e^u\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^u \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

o sea:

$$E(X) = 0.$$

De la misma forma calculamos

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,e^{-x^2/2}\,dx.$$

Integremos por partes haciendo

$$\begin{cases} u = x \\ dv = x\,e^{-x^2/2} \end{cases}, \text{ lo que implica } \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x^2/2} \end{cases};$$

se tiene entonces:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, e^{-x^2/2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x \, e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx = 1$$

o bien

$$E(X^2) = 1.$$

Se sabe que:

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, o sea $\mathrm{Var}(X) = 1 - 0 = 1$ y $\sigma_x = 1$.

11. *a*) Para calcular

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-x/a} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \, d\frac{x}{a},$$

hagamos $u = x/a$, lo que implica $x = au$ y $dx = a \, du$ o bien $du = d\dfrac{x}{a}$; siendo a positivo, cuando x varía de 0 a $+\infty$, $u = x/a$ lo hace de 0 a $+\infty$, y

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \, d\frac{x}{a} = \int_0^{+\infty} e^{-u} \, du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1.$$

b) Para calcular $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{a} e^{-x/a} \, dx$, integremos por partes haciendo

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{a} e^{-x/a} \, dx. \end{cases}, \text{ lo que implica } \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x/a} \end{cases}$$

se tiene entonces:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{a} e^{-x/a} \, dx = \left[-x \, e^{-x/a} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \, dx$$

Ahora bien:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-x/a} \, dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \, dx = a \Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \, dx = a.$$

De la misma forma integremos por partes

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{a} e^{-x/a} dx$$

haciendo $\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \frac{1}{a} e^{-x/a} dx \end{array} \right.$ lo que implica $\left\{ \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = -e^{-x/a} \end{array} \right.$.

Se tiene entonces

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{a} e^{-x/a} dx = \left[-x^2 e^{-x/a} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-x/a} dx$$

o bien $E(X^2) = \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-x/a} dx$

$$= 2a \int_0^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-x/a} dx = 2aE(X) = 2a \cdot a = 2a^2$$

Como $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, se tiene $\operatorname{Var}(X) = 2a^2 - a^2 = a^2$ y $\sigma_x = a$.

c) Queda reducido al caso *b*) eligiendo $a = 1$; luego se tiene

$$E(X) = a = 1;\ \operatorname{Var}(X) = a^2 = 1 \text{ y } \sigma_x = a = 1,$$

o sea:

$$\boxed{E(X) = \operatorname{Var}(X) = \sigma_x = 1}.$$

d) $\forall n \in \mathbf{N}$, se tiene:

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

De aquí resulta que:

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{(n+1)-1} dx$$

$$= \Gamma(n+1) = n!$$ [Ver pág. 289]

e) Se designa por $\Gamma(a)$ a la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx,$$

que se llama «función gamma» (de a) (Ver pág. 289). Si a es un entero, resulta del cálculo de:

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\, dx = \Gamma(n+1)$$

que:

$$\Gamma(a) = (a-1)! \quad \forall a \text{ entero positivo.}$$

Para calcular

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-1/2}\, dx,$$

hagamos $(2x)^{½} = t$; entonces: $x^{-½} = \dfrac{\sqrt{2}}{t}$; $2x = t^2$ y $dx = t\, dt$.

Además t varía de 0 a $+\infty$ cuando x lo hace de 0 a $+\infty$, de donde:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-½}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \frac{\sqrt{2}}{t}\, t\, dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi},$$

ya que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\pi/2}.$$

Se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(n-2)(n-4)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{(n-1)/2}}\sqrt{\pi},$$

pues $\quad \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) = \left(\dfrac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-1\right) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

12. *a*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(\chi^2)\, d\chi^2 = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{\frac{\lambda_n}{2}-1}\, d\chi^2.$

Para calcular esta última integral hagamos $\chi^2/2 = x$, lo que implica

$\chi^2 = 2x$ y $d\chi^2 = 2\,dx$; cuando χ^2 varía de 0 a $+\infty$, $x = \chi^2/2$ lo hace de 0 a $+\infty$, y

$$\int_0^{+\infty} f(\chi^2)\,d\chi^2 = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,(2x)^{\frac{n}{2}-1}\,2\,dx$$

$$= \frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dx.$$

Ahora bien, según 11 *e*):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dx = \Gamma(n/2)$$

lo que implica

$$\int_0^{+\infty} f(\chi^2)\,d\chi^2 = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\Gamma(n/2) = 1.$$

b) $$E(\chi^2) = \int_0^{+\infty} \chi^2 f(\chi^2)\,d\chi^2 = \int_0^{+\infty} \chi^2\,\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,e^{-\chi^2/2}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2)^{n/2}\,d\chi^2$$

y si se hace $\chi^2/2 = x$, lo que implica $\chi^2 = 2x$ y $d\chi^2 = 2\,dx$, se tiene:

$$E(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2)^{n/2}\,d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}(2x)^{n/2}\,2\,dx = \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n/2}\,dx.$$

Ahora bien: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n/2}\,dx = \int^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}+1-1}\,dx = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

y por consiguiente

$$E(\chi^2) = \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n/2}\,dx$$

$$= \frac{2^{n/2}\cdot 2}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,\frac{n}{2}\,\Gamma(n/2) = 2\cdot\frac{n}{2} = n, \quad \text{o sea } \boxed{E(\chi^2) = n}.$$

Se tiene:

$$E[(\chi^2)^2] = E(\chi^4) = \int_0^{+\infty} \chi^4 f(\chi^2)\, d\chi^2 =$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} \chi^4\, e^{-\chi^2/2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d\chi^2 = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-\chi^2/2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}+1}\, d\chi^2$$

poniendo siempre $\chi^2/2 = x$, lo que implica $\chi^2 = 2x$ y $d\chi^2 = 2\,dx$, resulta:

$$E[(\chi^2)^2] = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x} (2x)^{\frac{n}{2}+1}\, 2\, dx$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+2}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}+1} dx$$

$$= \frac{2^{n/2}\cdot 2^2}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}+1} \quad dx = \frac{2^2}{\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right).$$

Ahora bien:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \left(\frac{n}{2}+1\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n+2)\,n}{4}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

y:

$$E[(\chi^2)^2] = \frac{2^2}{\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{2^2}{\Gamma(n/2)}\cdot\frac{(n+2)\,n}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{4\,n(n+2)}{4} = n(n+2).$$

Como $E[(\chi^2)^2] = n(n+2)$ y $E(\chi^2) = n$,

$$\mathrm{Var}(\chi^2) = E[(\chi^2)^2] - [E(\chi^2)]^2 = n(n+2) - n^2 = 2n,$$

o sea: $\boxed{\mathrm{Var}(\chi^2) = 2n \quad \text{y} \quad \sigma_{\chi^2} = \sqrt{2n}}$

13. *a*) Se tiene $\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \int_0^1 dF(x)$, pues:

$$dF(x) = 0 \begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[& \text{ya que entonces} \quad F(x) = 0, \\ \forall x \in]1, +\infty[& \text{ya que entonces} \quad F(x) = 1. \end{cases}$$

$$\text{Como}\quad dF(x) = \begin{cases} d(x^2) = 2\,x\,dx & \text{para} \quad 0 < x \leqslant 0{,}2 \\ 0{,}4 - (0{,}2)^2 = 0{,}36 & \text{para} \quad x = 0{,}2 \\ 0 & \text{para} \quad 0{,}2 < x \leqslant 0{,}4 \\ dx & \text{para} \quad 0{,}4 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

se tiene:

$$\int_0^1 dF(x) = \int_0^{0,2} 2\,x\,dx + 0{,}36 + \int_{0,4}^1 dx = [x^2]_0^{0,2} + 0{,}36 + [x]_{0,4}^1$$

$$= 0{,}04 + 0{,}36 + 1 - 0{,}4 = 1$$

y $F(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria continua x que toma sus valores sobre [0 1].

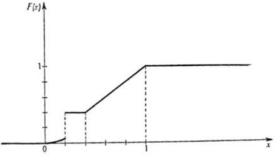


FIG. 36

b) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = \int_0^1 x\,dF(x)$$

$$= \int_0^{0,2} x \cdot 2\,x\,dx + 0{,}2 \cdot 0{,}36 + \int_{0,4}^1 x\,dx$$

$$= \left[\frac{2\,x^3}{3}\right]_0^{0,2} + 0{,}072 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0,4}^1$$

$$= \frac{0{,}016}{3} + 0{,}072 + \frac{1 - 0{,}16}{2} = \frac{1{,}492}{3} \approx 0{,}5.$$

Análogamente:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}F(x) = \int_0^{0,2} x^2 \cdot 2x \,\mathrm{d}x + (0,2)^2 \cdot 0,36 + \int_{0,4}^1 x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^{0,2} + 0,014\,4 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,4}^1$$

$$= 0,000\,8 + 0,014\,4 + \frac{1 - 0,064}{3} = 0,327\,2.$$

De aquí se deduce que la varianza de X es

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,327\,2 - (0,5)^2 = 0,377\,2 - 0,25 = 0,077\,2$$

y

$$\sigma = \sqrt{0,077\,2} \approx 0,28.$$

c) La función generatriz de la variable aleatoria X es la función g definida por

$$u \multimap g(u) = \int_{+\infty}^{-\infty} u^x \,\mathrm{d}F(x) = \int_0^1 u^x \,\mathrm{d}F(x).$$

Luego se tiene

$$g(u) = \int_0^{0,2} u^x\, 2x \,\mathrm{d}x + u^{0,2}\,(0,4 - 0,04) + \int_{0,4}^1 u^x \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{0,2} u^x\, x \,\mathrm{d}x + 0,36\, u^{0,2} + \left[\frac{u^x}{\log_e u}\right]_{0,4}^1.$$

Integremos por partes la integral $\int_0^{0,2} xu^x \,\mathrm{d}x$. Haciendo

$$\begin{cases} U = x & \Rightarrow \ \mathrm{d}U = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = u^x \,\mathrm{d}x & \Rightarrow \ V = \dfrac{u^x}{\log_e u}; \end{cases}$$

se obtiene:

$$\int_0^{0,2} xu^x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{xu^x}{\log_e u}\right]_0^{0,2} - \int_0^{0,2} \frac{u^x \,\mathrm{d}x}{\log_e u} = \frac{0,2\, u^{0,2}}{\log_e u} - \frac{u^{0,2} - 1}{(\log_e u)^2},$$

y

$$g(u) = \int_0^1 u^x \, dF(x) = 2\int_0^{0,2} xu^x \, dx + 0,36\, u^{0,2} + \left[\frac{u^x}{\log_e u}\right]_{0,4}^1$$

$$= \frac{0,4\, u^{0,2}}{\log_e u} + 2\,\frac{1 - u^{0,2}}{(\log_e u)^2} + 0,36\, u^{0,2} + \frac{u - u^{0,4}}{\log_e u}$$

$$= \frac{0,36\, u^{0,2}\,(\log_e u)^2 + [u - u^{0,4} + 0,4\, u^{0,2}]\log_e u + 2(1 - u^{0,2})}{(\log_e u)^2}.$$

14. *a*) Designemos por $dF(t) = F(t + dt) - F(t)$ la parte de población cuyos individuos tienen una renta comprendida entre t y $t + dt$. De aquí resulta que la cantidad total de las rentas de los individuos de esta población es igual a $t\,dF(t)$; la suma de las rentas individuales superiores a x es entonces igual a la integral de Stieljes

$$\int_x^\infty t\,dF(t) = \int_x^\infty t \cdot N d(1 - t^{-3/2}) = N\int_x^\infty t d(-t^{-3/2})$$

$$= \frac{3}{2} N \int_x^\infty t \cdot t^{-5/2}\, dt = \frac{3}{2} N \int_x^\infty t^{-3/2}\, dt$$

$$= \frac{3}{2} N[-2\, t^{-1/2}]_x^{+\infty} = 3\, N x^{-1/2}$$

Por la ley de Pareto, como hay $N - N(1 - x^{-3/2}) = N\,x^{-3/2}$ personas que tienen una renta superior a x, se deduce que la renta media de esas personas es:

$$\frac{1}{Nx^{-3/2}} \int_x^{+\infty} t\,dF(t) = \frac{1}{Nx^{-3/2}} \cdot 3\,Nx^{-1/2} = 3\,x.$$

En particular, en la población activa del país considerado en que la renta individual mínima es el salario mínimo, la renta media es igual a tres veces el salario mínimo. En general, la renta media de las personas que tienen una renta superior a la del Sr. García es igual a tres veces la del Sr. García (Tomo I).

b) La suma de las rentas individuales a x es igual a la integral de Stieljes

$$\int_x^\infty t\,dF(t) = \int_x^\infty t \cdot N\, d(1 - t^k) = N\int_x^\infty t\, d(-t^k)$$

$$= -Nk\int_x^\infty t^k\, dt = -Nk\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^\infty = \frac{k}{k+1} N x^{k+1}$$

pues $k + 1 < 0 \Rightarrow \infty^{k+1} \approx 0$.

La renta media de las personas que es superior a x es:

$$\frac{1}{Nx^k}\int_x^\infty t\,\mathrm{d}F(t) = \frac{1}{Nx^k}\cdot\frac{k}{k+1}Nx^{k+1} = \frac{k}{k+1}x,$$

15. *a*) Para que $f(x, y) = Kxy\ \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$ sea la densidad de probabilidad de la variable bivariante (X, Y) es necesario y suficiente que

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Ahora bien:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{x=\infty} Kx\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=x} y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= K\int_{x=0}^{x=\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\left[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$= K\int_{x=0}^{x=\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x$$

$$= K\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - K\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= K\left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_0^\infty + \frac{K}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^\infty = K - \frac{K}{2} = \frac{K}{2}.$$

K se debe elegir de tal manera que $K/2 = 1$; entonces $K = 2$ y

$$f(x, y) = 2\,xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}.$$

b) La densidad de probabilidad $a(x)$ de la ley marginal de X viene definida por

$a(x)\,\mathrm{d}x = \text{Prob}\,\{x \leqslant X < x + \mathrm{d}x,\ Y \text{ cualquiera}\},$
$\qquad = \text{Prob}\,\{x \leqslant X < x + \mathrm{d}x,\ Y \leqslant x\}$, ya que $0 \leqslant y \leqslant x$.

Entonces se tiene

$$a(x) = \int_0^x f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 2\,xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y = 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\int_0^x y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\left[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_0^x = 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(1-\mathrm{e}^{-x^2/2}),$$

o sea

$$a(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})$$

Análogamente, la densidad de probabilidad $b(y)$ de la ley marginal de Y es

$$b(y) = \int_y^\infty 2\,xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x = 2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\int_y^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_y^\infty = 2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\cdot\mathrm{e}^{-y^2/2} = 2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2}$$

o sea

$$b(y) = 2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2}.$$

Como el producto

$$a(x)\,b(y) = 4\,xy\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})\,\mathrm{e}^{-y^2}$$

es diferente de $f(x, y)$, resulta que las variables X e Y son dependientes.

c) La densidad de probabilidad $a^y(x)$ de la ley de probabilidad condicionada de X (para $Y = y$, o más exactamente para $y \leqslant Y < y + \mathrm{d}y$) viene definida por

$$a^y(x) = \frac{f(x,y)}{b(y)} = \frac{2\,xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}}{2\,y\,\mathrm{e}^{-y^2}} = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\mathrm{e}^{y^2/2}.$$

La densidad de probabilidad $b^x(y)$ de la ley de probabilidad condicionada de Y (para $X = x$), viene definida por

$$b^x(y) = \frac{f(x,y)}{a(x)} = \frac{2\,xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}}{2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})} = \frac{y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2/2}}.$$

Observación. — Es útil el verificar que $a(x)$, $b(y)$, $a^y(x)$ y $b^x(y)$ son densidades de probabilidad calculando su integral entre 0 y $+\infty$.

d) $$E(X) = \int_0^\infty x a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\cdot 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right].$$

Integremos por partes $\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$, haciendo

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow\ v = -\mathrm{e}^{-x^2/2}; \end{cases}$$

se obtiene:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2} dx = \left[-x e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \left[\frac{-x e^{-x^2}}{2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Ahora bien, haciendo $x^2 = t^2/2$ o bien $x = t/\sqrt{2}$, lo que implica $dx = dt/\sqrt{2}$, se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

y

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Resulta que

$$E(X) = 2\left[\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2} dx - \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx\right] = 2\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right]$$

o sea:

$$E(X) = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot b(y)\, dy = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Como $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, se tiene

$$E(X + Y) = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

o sea:

$$E(X + Y) = \sqrt{2\pi}.$$

e) Se tiene $E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, a(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2\, 2\, x\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, (1 - \mathrm{e}^{-x^2/2})\, \mathrm{d}x$

$$= 2\left[\int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x - \int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\ \right].$$

Integremos por partes $\int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x$. Haciendo:

$$\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2\, x\, \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = x\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x & \Rightarrow \quad v = -\, \mathrm{e}^{-x^2/2}; \end{cases}$$

se obtiene:

$$\int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \left[-x^2\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = 2\left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_0^\infty = 2.$$

De la misma forma se tiene:

$$\int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2\, \mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\, \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2},$$

y

$$E(X^2) = 2\left[\int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x - \int_0^\infty x^3\, \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right] = 2\left[2 - \frac{1}{2}\right] = 3.$$

Se tiene:

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2\, b(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty y^2\, 2\, y\, \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = 2\int_0^\infty y^3\, \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = 1.$$

De ello se deduce que:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}\right)^2 \pi \approx 0{,}3736$$

y $\sigma_X \approx \sqrt{0{,}3736} \approx 0{,}61$;

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}2146$$

y $\sigma_Y \approx \sqrt{0{,}2146} \approx 0{,}46.$

PROBLEMA VI'

1) Calcular las integrales:

a) $\int x^6\,dx$; $\int \frac{dx}{x^5}$; $\int x\sqrt[3]{x^2}\,dx$; $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3}}$;

$\int e^{-2x}\,dx$; $\int e^{-x/2}\,dx$; $\int 3^{2x}\,dx$; $\int 5^{-x/4}\,dx$.

b) $\int \frac{dx}{x+1}$; $\int \frac{dx}{x+n}$; $\int \frac{dx}{2x}$; $\int \frac{dx}{nx}$;

$\int \frac{p\,dx}{qx}$; $\int \frac{p\,dx}{q(x+n)}$; $\int \frac{(3x^2+6x+3)\,dx}{x^3+3x^2+3x-1}$.

c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x+1} + 3^{-x}\right) dx$; $\int \left(5^{-2x} + x\sqrt{x^3} + \frac{1}{5x}\right) dx$;

$\int \left(4^{x/2} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$; $\int \left(2x^5 + \frac{1}{3x^5} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-7}\right) dx$;

$\left(\int 4e^{2x} + x^3\sqrt{x^5} + 3^{4x} - \frac{1}{x+3}\right) dx$; $\int (e^x + e^{2x} + 2^x)\,dx$.

d) $\int_1^9 x^2\sqrt{x}\,dx$; $\int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int_0^1 e^{9x}\,dx$; $\int_1^4 5^x\,dx$; $\int_{e^3}^{\sqrt[5]{e}} \frac{dx}{x}$; $\int_{1/e}^1 \frac{dx}{2x}$;

$\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{nx}$; $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$; $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$; $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cotg} x\,dx$;

$\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$; $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a > 0)$.

2) Calcular con la ayuda de un cambio de variable sencillo las integrales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx; \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx; \quad \int \frac{e^x\, dx}{e^x + 5}; \quad \int \frac{2\, e^{2x}}{e^{2x} + 7}\, dx;$$

$$\int \frac{\log_e 3 \cdot 3^x}{(3^x + 4)}\, dx; \quad \int (4\, x^3 + 2\, x - 4) \sqrt[4]{x^4 + x^2 - 4\, x + 1}\, dx;$$

$$\int \frac{4\, x^3 + 2\, x - 4}{x^4 + x^2 - 4\, x + 1}\, dx; \quad \int (2\, ax + b)\, e^{ax^2 + bx + c}\, dx;$$

$$\int \frac{(2\, ax + b)\, e^{ax^2 + bx + c}}{e^{ax^2 + bx + c} + 10}; \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\, dx; \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{10} x}\, dx;$$

$$\int \frac{x}{e^{x^2}} dx; \quad \int \frac{x e^{x^2}}{e^{x^2} + 4}\, dx; \quad \int x\, 3^{-x^2} dx.$$

3) Haciendo $\operatorname{tg} x/2 = t$, calcular las integrales:

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}; \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x}; \quad \int \frac{dx}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3}; \quad \int \frac{dx}{13 + 12 \cos x};$$

$$\int \frac{dx}{5 - 4 \cos x}; \quad \int \frac{dx}{13 - 12 \cos x}; \quad \int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}; \quad \int \frac{dx}{12 + 13 \cos x}$$

4) Haciendo $\operatorname{tg} x = t$, lo que implica $dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$ calcular las integrales:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx; \quad \int \operatorname{tg}^3 x\, dx; \quad \int \operatorname{tg}^4 x\, dx;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}; \quad \int \frac{dx}{4 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 9 \cos^2 x}; \quad \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}; \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen} x + \cos x};$$

5) Descomponiendo las fracciones racionales en expresiones simples, calcular:

$$\int \frac{3\, x - 7}{x^2 - 5\, x + 6}\, dx; \quad \int \frac{3\, x - 7}{x^2 - 3\, x - 4}\, dx;$$

$$\int \frac{7\, x + 11}{2(x^2 + x - 2)}\, dx; \quad \int \frac{(m + n)\, x - (bm + an)}{x^2 - (a + b)\, x + ab}\, dx;$$

$$\int \frac{x^3\, dx}{x^4 + 3\, x^2 + 2}\, dx; \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\,(x^2 + 4)}; \quad \int \frac{x\, dx}{(x^2 + 1)\,(x^2 + 4)};$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)};\quad \int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)};\quad \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+25)};$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+16)(x^2+49)};\quad \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^4-1};\quad \int \frac{dx}{x^4-a^4};\quad \int \frac{x^4\,dx}{x^2-4x+3}$$

6) Integrar por partes las integrales siguientes:

a) $\int \frac{2x^2\,dx}{(x^2+1)^2};\quad \int x^3 \log_e x\,dx;\quad \int x^3 e^x\,dx;$

$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx;\quad \int x^2 \cos x\,dx;\quad \int x^3 \operatorname{sen} x\,dx;$

b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx;\quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ (se establecerá una fórmula de recurrencia).

7) Se considera la variable aleatoria continua X que puede tomar todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

a) Verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

b) Calcular $E(X)$; $E(X^2)$; $\operatorname{Var}(X)$ y σ_x.

8) Una variable aleatoria continua X puede tomar todos los valores comprendidos entre c y $+\infty$ y tiene por densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{a}\, e^{-(x-c)/a}\,dx \quad (a > 0).$$

Calcular $E(X)$; $E(X^2)$; $\operatorname{Var}(X)$ y σ_x.

9) Una variable aleatoria continua X puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$ y tiene por densidad de probabilidad

$$f(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\, e^{-\chi^2/2\sigma^2} \left(\frac{\chi^2}{2\sigma^2}\right)^{n/2-1} d\left(\frac{\chi^2}{2\sigma^2}\right).$$

Calcular $E(\chi^2)$; $E[(\chi^2)^2]$; $\operatorname{Var}(\chi^2)$ y σ_{χ^2}.

10) Calcular las integrales siguientes:

a) $\iint_{\mathcal{D}} e^{-x} e^{-y} \, dx \, dy$, en donde $\mathcal{D} = \{(x\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y\}$;

b) $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{x}{y} \, dx \, dy$, en donde $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2\}$;

c) $\iint_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$,
en donde $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$;

d) $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{x}{y} \, dx \, dy$,
en donde $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant 2, x \leqslant y\}$.

Soluciones:

1. a) $\dfrac{x^7}{7} + C$; $-\dfrac{1}{4x^4} + C$; $\dfrac{3x^2 \sqrt[3]{x^2}}{8} + C$; $\dfrac{-2}{5x^2\sqrt{x}} + C$;

$\dfrac{-e^{-2x}}{2} + C$; $-2e^{-x/2} + C$; $\dfrac{3^{2x}}{2\log_e 3} + C$; $\dfrac{-4 \cdot 5^{-x/4}}{\log_e 5} + C$.

b) $\log_e |x+1| + C$; $\log_e |x+n| + C$; $\log_e \sqrt{x} + C$;

$\log_e \sqrt[n]{|x|} + C$; $\log_e |x|^{p/q} + C$; $\log_e |x+n|^{p/q} + C$;

$\log_e |x^3 + 3x^2 + 3x - 1| + C$.

c) $2\sqrt{x} + \log_e (x+1)^2 - \dfrac{3^{-x}}{\log_e 3} + C$;

$\dfrac{-5^{-2x}}{2\log_e 5} + \dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7} + \log_e \sqrt[5]{|x|} + C$;

$\dfrac{2 \cdot 4^{x/2}}{\log_e 4} + \log_e |x-1|^3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$; $\dfrac{x^6}{3} - \dfrac{1}{12x^4} + \log_e \left|\dfrac{x-7}{x+7}\right| + C$;

$2e^{2x} + \dfrac{2x^6\sqrt{x}}{13} + \dfrac{3^{4x}}{4\log_e 3} + \log_e \dfrac{1}{|x+3|} + C$; $e^x + \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{2^x}{\log_e 2} + C$.

d) $624{,}8$; 6; $\dfrac{e^3-1}{9}$; $\dfrac{620}{\log_e 5}$; $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{n}$; 1; 1;

$\log_e 2$; $\log_e 2$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2a}$.

2. $\dfrac{1}{\cos x}+C$; $-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}+C$; $\log_e(e^x+5)+C$;

$\log_e(e^{2x}+7)+C$; $\log_e(3^x+4)+C$;

$\dfrac{4(x^4+x^2-4x+1)\sqrt[4]{x^4+x^2-4x+1}}{5}+C$;

$\log_e|x^4+x^2-4x+1|+C$; $e^{ax^2+bx+c}+C$; $\log_e(e^{ax^2+bx+c}+10)+C$;

$\dfrac{1}{4\cos^4 x}+C$; $\dfrac{-1}{9\operatorname{sen}^9 x}+C$; $\dfrac{-e^{-x^2}}{2}+C$;

$\log_e\sqrt{e^{x^2}+4}+C$; $-\dfrac{3^{-x^2}}{2\log_e 3}+C$.

3. $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} x/2}+C$; $-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x/2}+C$; $\operatorname{Arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)+C$;

$\dfrac{2}{5}\operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x/2}{5}\right)+C$; $\dfrac{2}{3}\operatorname{Arc\,tg}\left(3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C$;

$\dfrac{2}{5}\operatorname{Arc\,tg}\left(5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C$; $\dfrac{1}{3}\log_e\left|\dfrac{3+\operatorname{tg} x/2}{3-\operatorname{tg} x/2}\right|+C$; $\dfrac{1}{5}\log_e\left|\dfrac{5+\operatorname{tg} x/2}{5-\operatorname{tg} x/2}\right|+C$.

4. $\operatorname{tg} x-x+C$; $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\log_e|\cos x|+C$; $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$;

$-\operatorname{cotg} x-x+C$; $-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}-\log_e|\operatorname{sen} x|+C$;

$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)+C$; $\dfrac{1}{3}\operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{3}\right)+C$;

$\dfrac{1}{2}\log_e\dfrac{1}{|\operatorname{sen} x+\cos x|}+\dfrac{x}{2}+C$; $\dfrac{1}{2}\log_e|\operatorname{sen} x+\cos x|+\dfrac{x}{2}+C$.

5. $\log_e |x-2|\,|x-3|^2 + C$; $\log_e |x+1|^2 |x-4| + C$;

$\log_e |x-1|^3 \sqrt{x+2} + C$; $\log_e |x-a|^m |x-b|^n + C$;

$\log_e \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} + C$; $\dfrac{1}{3}\left[\operatorname{Arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{2}\right] + C$; $\dfrac{1}{6}\log_e \dfrac{x^2+1}{x^2+4} + C$

$\dfrac{1}{3}\left[2\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{Arc\,tg} x\right] + C$; $\dfrac{1}{6}\log_e \dfrac{(x^2+4)^4}{x^2+1} + C$;

$\dfrac{1}{16}\left[5\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{5} - 3\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{3}\right] + C$; $\dfrac{1}{66}\log_e \dfrac{(x^2+49)^{49}}{(x^2+16)^{16}} + C$;

$\dfrac{1}{2}\log_e \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + C$; $\log_e \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|^{1/4} - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x + C$;

$\dfrac{1}{4a^3}\log_e \left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| - \dfrac{1}{2a^3}\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C$;

$\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 13x + \log_e \sqrt{\dfrac{(x-3)^{81}}{x-1}} + C.$

6. a) $-\dfrac{x}{x^2+1} + \operatorname{Arc\,tg} x + C$ $\left(\text{si se hace } u = x \text{ y } dv = \dfrac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}\right)$

$\dfrac{x^4}{4}\log_e x - \dfrac{x^4}{16} + C$; $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$;

$2x \operatorname{sen} x - (x^2-2)\cos x + C$; $2x\cos x + (x^2-2)\operatorname{sen} x + C$;

$3(x^2-2)\operatorname{sen} x + (-x^3+6x)\cos x + C.$

b) $\forall n, \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

[si se hace $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$];

si $n = 2p \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \dots n}\,\frac{\pi}{2}$

y si $n = 2p+1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \dots (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7 \dots n}$

7. a) Es preciso escribir $\dfrac{x-m}{\sigma} = t$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

b) $E(X) = m$; $E(X^2) = m^2 + \sigma^2$; $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ y $\sigma_x = \sigma$.

8. $E(X) = a + c$; $E(X^2) = 2a^2 + 2ac + c^2$; $\mathrm{Var}(X) = a^2$ y $\sigma_x = a$.

9. $E(\chi^2) = n\sigma^2$; $E[(\chi^2)^2] = n(n+2)\sigma^4$; $\mathrm{Var}(\chi^2) = 2n\sigma^4$ y $\sigma_{\chi^2} = \sqrt{2n}\,\sigma^2$.

10. a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \int_0^{x} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$;

b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2} \frac{1}{y} \int_0^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$;

c) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{R} \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})}{4}$;

d) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{y} \int_{x=0}^{x=y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}.$

PARANINFO

Magallanes, 21
MADRID-15